

José de Jesús Martínez

**INTRODUCCION**  
**A UN LENGUAJE**  
**SIN SIGNIFICADO**

---

**PUBLICACIONES DEL**  
**INSTITUTO FERMIN NAUDEAU**  
**PANAMA, 1963**

---

AN  
0.1  
85  
1



INTRODUCCION A UN LENGUAJE  
SIN SIGNIFICADO

Por

Jose de Jesús Martínez

Publicaciones del Instituto Fermín Naudeau

Panamá, 1963



I

1

El pensamiento refleja la realidad.

2

Llamamos "lenguaje" a la expresión del pensamiento.

3

El lenguaje refleja el pensamiento.

4

En el pensamiento se traduce la estructura de la realidad, y en el lenguaje, la del pensamiento.

5

Un estudio del lenguaje nos premiará con información sobre el pensamiento, y también, por tanto, sobre la realidad.

6

Este ensayo tiene como objeto el lenguaje, y como objetivo, el pensamiento. Estudiar el pensamiento en esa realización material suya que es el lenguaje es más científico que tratar de captarlo en sí mismo, en su naturaleza espiritual y huidiza.

7

En la concepción idealista, el lenguaje era tenido como un mero vehículo material, más o menos estrecho, para el transporte del pensamiento espiritual. En la concepción realista, en cambio, el lenguaje es instrumento del pensamiento sin el cual no podría darse.

8

La experiencia científica comprueba la concepción realista del lenguaje. Ej.: El niño-lobo de la India.

Hay muchas clases de lenguajes: mímicos, táctiles, orales, escritos, etc...

De todos ellos, el escrito es, sin duda, el más apto para la inspección científica, y al que, en consecuencia, se circunscribirá este ensayo.

El lenguaje . . . traduce (expresa):

- a) el objeto pensado,
- b) el sujeto pensante.

Los lenguajes que se especializan en expresar los objetos pensados, se llaman "objetivos". Ej.: "María come", es un lenguaje objetivo. Expresa lo que pienso de María, a María pensada.

Los lenguajes que se especializan en expresar el sujeto pensante, se llaman "subjetivos". Ej.: "María es una bestia", en el fondo, expresa mi pensar (enojado, ofendido). Me expresa, me traduce a mí, no a María.

Los lenguajes subjetivos son más o menos intensos, los objetivos, más o menos extensos (generales).

El lenguaje objetivo se subdivide en:

- a) apofántico
- b) no-apofántico.

El lenguaje apofántico es el que pone de manifiesto o declara alguna propiedad de aquello a lo que se refiere. Ej.: "María come".

17

El lenguaje no-apofántico se subdivide en:

- a) interrogativo
- b) imperativo

18

Son lenguajes interrogativos los que solicitan una información. Ej.: "¿María come?". Y son imperativos los que prescriben o prohíben una acción. Ej.: "!María, come!".

19

Hay que distinguir entre forma y función de un lenguaje. Forma es su estructura. Función es el uso que se le da al lenguaje. Ej.: Cuando llega una persona a quien esperábamos por largo rato, le decimos: "¿Por fin llegaste?". Esta expresión tiene forma interrogativa pero una función declarativa. Otro ejemplo: Juan, que ama a María, dice: "María es la mujer más bella del universo". Esta expresión tiene forma apofántica pero una función totalmente subjetiva.

20

El lenguaje, como la vida racional-sentimental del hombre, es complejo. En un mismo argumento aparecen diversas funciones. Hay que apelar siempre al contexto para saber la función del lenguaje, pues su inspección formal no es suficiente. Además las funciones participan unas de otras, y es muy difícil que se den en estado puro.

21

La Lógica, en sus condiciones actuales, debe expurgar al lenguaje de todo elemento no-apofántico o subjetivo, y prescindir de ello por muy valioso que sea.

22

El lenguaje apofántico es verdadero o falso si se adecúa o no, respectivamente, a la realidad. Ej.: "Chitré es la capital de Panamá", es una declaración falsa.

23

El lenguaje interrogativo es adecuado o inadecuado si tiene o no,

respectivamente, una respuesta apofántica. Ej.: "¿Cuánto pesa un cansancio azul?", es una pregunta inadecuada.

24

El lenguaje imperativo es lícito o ilícito según sea o no congruente con los reglamentos pertinentes, (éticos, religiosos, técnicos, etc.). Ej.: "Odia a tu prójimo", es una orden ilícita (éticamente).

25

El lenguaje subjetivo es sincero o hipócrita si se adecúa o no a quien lo usa. Ej.: "Dios existe", es una proposición que puede ser sincera o hipócrita, pero no verdadera. Ni siquiera falsa.

26

Però la proposición "Yo creo que Dios existe" es objetiva, y como tal puede ser verdadera o falsa.

27

Además, el lenguaje puede tener o no, sentido. Hay tres sentidos:

- a) sintáctico,
- b) semántico,
- c) pragmático.

28

Tiene sentido sintáctico un lenguaje que no infringe las leyes de la Sintaxis. Sintaxis es la ciencia que estudia las relaciones entre los elementos de un lenguaje, considerados en sí mismos. Ej.: "En un cuando ahora porque y", o " $5x=2$ ", no tienen sentido sintáctico.

29

El sentido semántico se refiere a las relaciones entre los elementos del lenguaje y su significado, o también entre esos mismos elementos en tanto que signos de sus significados. Ej.: "Un cansancio azul partido por la mitad", no tiene sentido semántico. Semántica es el estudio de las relaciones entre el lenguaje y su significado.

30

El sentido pragmático se refiere a las relaciones entre los elementos del lenguaje y el individuo que los interpreta, o también entre los

elementos del lenguaje en tanto que interpretados por un intérprete. Ej.: "Um wieviel Uhr ist es?", no tiene sentido pragmático para quien no sepa alemán.

31

El 'sentido sintáctico es básico.' Puede haber un lenguaje sin significado (sin sentido semántico), o sin que haya quien lo entienda (sin sentido pragmático), pero no sin sin sentido sintáctico.

32

Los lenguajes están compuestos de elementos (objetivos o subjetivos) relacionados sintáctica o semánticamente.

33

Toda ciencia es un lenguaje (declarativo).

34

Las ciencias pueden ser:

- a) formales,
- b) descriptivas.

35

Ciencia formal, deductiva o exacta, es un lenguaje cuyos elementos están exclusivamente regidos por la Sintaxis. Ej.: Matemáticas, Lógica, etc...

36

Ciencia descriptiva, inductiva o experimental, es un lenguaje cuyos elementos están principalmente regidos por los objetos que trata (semántica). Ej.: Zoología, Botánica, etc...

37

Hablar de una ciencia, como hacemos ahora, es hablar de un lenguaje. Es un lenguaje refiriéndose a un lenguaje.

38

El lenguaje está compuesto de signos, y es un signo.

El lenguaje, además de significar algo, es algo.

Significar es rebotar la conciencia del intérprete, del signo a la cosa significada.

Por tanto, una cosa no puede ser signo y cosa significada a la vez.

Los signos que significan otros signos (que por ser significados no significan), se llaman "metasignos".

Los lenguajes que significan otros lenguajes, se llaman "metalenguajes".

Los lenguajes significados por otro lenguaje (metalenguaje), se llaman "objeto-lenguajes".

Un lenguaje puede ser objeto-lenguaje y metalenguaje a la vez, pero de lenguajes diferentes. Ej.: ""Hombre" se escribe con h", está escrito en español". "Se escribe con h" es metalenguaje con respecto a "Hombre", pero objeto-lenguaje con respecto a "Está escrito en español".

Dos lenguajes diferentes pueden estar en el mismo idioma. En el ejemplo de arriba, hay tres lenguajes de diferente nivel, pero todos ellos en idioma español.

Decimos "usar" el lenguaje que significa.

Decimos "mencionar" el lenguaje que no significa. (significado).

49

El metalenguaje menciona al objeto-lenguaje.

50

El lenguaje usado es transparente. En esta transparencia se funda su significar, su dejar ver lo significado.

51

El lenguaje mencionado es opaco. En esta opacidad se funda el que podamos verlo a él (y también el que no podamos ver a su través).

52

Una cosa no puede ser transparente y opaca a la vez.

53

Por lo tanto, un lenguaje no puede ser metalenguaje (ni objeto-lenguaje) de sí mismo.

54

El principio anterior le cierra el paso a las llamadas "paradojas semánticas", algunas de las cuales pueden formularse así:

a) Epiménides, poeta cretense, afirma que los cretenses mienten siempre. Por tanto, si lo que Epiménides ha dicho es verdad, él, como cretense, ha mentado. Únicamente si es mentira que los cretenses mienten siempre, es decir, únicamente si es falso lo que Epiménides ha dicho, es que ha podido decir la verdad.

b) Un hombre llega a un pueblo en cuya entrada aparece la siguiente advertencia: "En este pueblo se condena a muerte a los mentireros y únicamente a ellos". El hombre, entonces, se presenta donde los jueces y les dice: "Señores, ustedes me van a condenar a muerte". Los jueces entonces se ven en el siguiente aprieto: Si lo condenan a muerte, el hombre ha dicho la verdad, y han condenado a muerte a quien ha dicho la verdad, en cuyo caso ellos y el letrado han mentado, por lo que tendrían que condenarse a muerte ellos mismos. Y si no lo condenan a muerte, lo que él ha dicho es mentira, y han dejado de condenar a un mentiroso. También en este caso salen ellos mismos y su letrado, de mentireros y deben por tanto condenarse a muer-

te. Los jueces, a lo prudentes, en vez de suicidarse en masa ante la sonrisa sardónica del bromista visitante, van donde su Gobernador, que por esos días es un señor llamado Sancho Panza, y le consultan el caso. El gobernador Sancho, que no sabe lógica moderna, pero que tiene un gran sentido común, piensa un instante y llega rápidamente a la solución: "Que le den veinte azotes y que lo expulsen del pueblo," dice.

55

Estas paradojas también pueden aparecer en función de signos simples (palabras): Llamemos autclógicas a todas las palabras que se significan a sí mismas, tales como "corta", (la palabra "corta" es corta), "palabra", "pronunciable", etc... Y llamemos heterológicas a las palabras que no se significan a sí mismas, tales como "caliente", (la palabra "caliente" no es caliente), "verde", "larga", etc... Entonces, la palabra "heterológica" es heterológica si y sólo si no es heterológica.

56

El denominador de  $\frac{2}{6}$  es divisible por 2. Pero  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ , en consecuencia, el denominador de  $\frac{1}{3}$  es divisible por 2.

57

En todas estas paradojas se viola el principio al que anteriormente habíamos llegado. Por ejemplo, en la última: " $\frac{2}{6}$ " es mencionado primero y después usado. Es decir, primero se toma la expresión como signo, y luego como significado.

58

Todo lo anterior se refiere al lenguaje apofántico. Los lenguajes no-apofánticos: interrogativo, imperativo, y los subjetivos, no están sujetos aún a regulaciones científicas.

I I

1

Llamamos lenguaje "exacto" a aquel cuyas proposiciones están todas sintácticamente demostradas y cuyos términos están todos nominalmente definidos dentro de ese lenguaje.

2

Al lenguaje exacto le llamamos también "ciencia deductiva" o "sistema exacto". Y a su técnica de deducción, "método axiomático".

3

"Método", en griego, significa "camino", y "axioma": "digno de fe".

4

Se entendía, desde Aristóteles, que "axiomas" eran las proposiciones básicas o principios de carácter general, a partir de las cuales se iniciaba la cadena de deducciones.

5

Se entendía, también desde Aristóteles, que "postulados" eran las proposiciones básicas o principios de carácter particular de la ciencia en cuestión, y que además postulaban el espacio o universo del discurso o dominio de individuos cuya existencia había que asumir.

6

Un sistema exacto ha de contar necesariamente, para no recular hasta el infinito ni girar en círculo, con una colección de términos no-definidos que inicien las definiciones, y de proposiciones no-demostradas que inicien las demostraciones.

7

A los términos no-definidos, se les llama "términos primitivos", y a las proposiciones no-demostradas, axiomas o postulados, se les llama "proposiciones primitivas".

8

Demostrar una proposición, en un sistema exacto, es rastrearla sintácticamente a otra que la contiene y que ha sido ya demostrada o presentada como primitiva.

9

Definir, en un sistema exacto, es establecer convencionalmente una forma tipográfica (lo definido, definiendum) más simple como abreviatura de una más compleja (lo que define, definiens).

10

Una definición es una orden o imposición y no es, por tanto, ni verdadera ni falsa, sí lícita o ilícita.

11

Las definiciones lícitas han de cumplir con este doble requisito:

- a) que su definiendum no tenga significado en el sistema,
- b) que su definiens tenga significado (dado en una definición previa), o que sea primitivo en el sistema.

12

De los términos primitivos no cabe definición exacta dentro del sistema, pero sí explicación, (definición desde fuera del sistema). Esta explicación no es necesaria, pero sí útil pedagógicamente.

13

A los axiomas (y también a los postulados, pero con menor rigor) se les exigía que fuesen evidentes, es decir, que su verdad fuese captada por un "golpe de vista" de la inteligencia (intuición).

14

Siguiendo a D. Hilbert y su axiomatización de la Geometría (1899), no se hace ya ninguna distinción entre axioma y postulado.

De acuerdo con una concepción realista y dialéctica, las cosas y los hechos no están meramente puestos los unos al lado de los otros, sino relacionados, y tan entrañablemente que estas relaciones son parte integrante de esas cosas y esos hechos.

La Ciencia, que refleja al pensamiento que refleja a la realidad, debe exhibir, por tanto, esas relaciones que amarran entre sí a las proposiciones de un lenguaje. "Demostrar" es exhibir estas relaciones. A las proposiciones demostradas, es decir, conectadas o relacionadas en el sistema, les llamamos "teoremas", y decimos que son correctas o lógicamente verdaderas.

La Ciencia, que refleja al pensamiento que refleja a la realidad, debe poder revertir (técnica) a esa realidad de donde surgió, en el sentido de poder ser empíricamente comprobable o aplicable. Decimos que las proposiciones de la Ciencia son verdades o empíricamente comprobables cuando se adecúan y son congruentes con la realidad.

La conciencia del hombre, como la Ciencia, refleja la realidad. Las proposiciones de la ciencia, por tanto, han de entrar en la conciencia del hombre como en la casa de un coterráneo: con familiaridad. Es decir, que han de ser convincentes. Además de ser verdaderas, han de parecerlo.

En resumen, toda proposición científica debe llenar estas tres condiciones:

- a) ser lógicamente demostrable,
- b) ser empíricamente comprobable,
- c) ser convincente.

Estas tres condiciones del lenguaje científico son reguladas, respectivamente, por la Sintaxis, la Semántica y la Pragmática.

Es el científico realista, pues, quien menos puede exonerar de demostración lógica las proposiciones de su ciencia, por muy comprobadas que estén empíricamente y por muy simple y evidente/<sup>que</sup> sea el hecho que refleja, e igualmente quien menos puede despreciar la elegancia retórica de la expresión.

Se le atribuye a los pitagóricos la paternidad del método axiomático.

Tales de Mileto (VI A.C.) es quien inicia, primitivamente, un lenguaje exacto. (En ocasión de la prueba relativamente rigurosa de que todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto. (Teorema de Tales).

En los Elementos de Euclides (300 A.C.) aparece ya explícitamente manifiesto un lenguaje exacto. (Euclides le llama a los axiomas "nocións comunes").

Con Galileo y Descartes, que suponen matemática la estructura de la realidad, se matematizan las ciencias y progresan hacia su sistematización exacta. Newton: Física; Espinoza: Metafísica.

La Ética de Espinoza es la aplicación del tratamiento matemático ("more geometrico") a un campo no-numérico (el metafísico).

Esta invasión del método matemático a dominios extra-numéricos tiene su momento cúspide en el siglo XIX con G. Boole, quien reduce todo el pensamiento a forma matemática susceptible de ser axiomatizado.

En el siglo XIX se demuestra la independencia del quinto postulado de Euclides (es decir, se demuestra que no se puede demostrar), presentándose así la geometría como una ciencia puramente formal y abstracta, independiente de la intuición sensible del espacio.

Riemann, en 1854, desarrolla una geometría no-euclidea con un axioma contradictorio al quinto postulado de Euclides. Antecedentes: Bolyai, Lobachevski, Gauss.

El criterio de la evidencia, que ya funciona en los Elementos de Euclides y que es explícitamente declarado en el Discurso de Descartes, tiene unos antecedentes o apoyos en la teología y la estéticas griegas.

La concepción griega de Dios como ser inteligente desembocará, con la teoría creacionista, en la de la verdad inteligente, clara y sencilla. Galileo, por cierto, parte de esta noción de Dios para resolver el problema que planteaba la aceleración de un grave cayendo libremente en el espacio: Supuesto Dios como inteligente, tenía que crear al mundo de la forma más económica y sencilla. La cuestión se reducía, por tanto, a averiguar cuál era la forma más sencilla y económica de acelerar un cuerpo cayendo libremente en el espacio. Hace bien poco todavía ha dicho Heisenberg, parafraseando a Leibniz: "Este no será el mejor de los mundos posibles. pero es el más sencillo".

La concepción estética griega valoraba de igual modo positivamente la sencillez, la "belleza sin lujo", y tenía, por otra parte, al mundo como cosmos, cosmético, es decir, como bello, y en consecuencia sencillo y ordenado. Todavía Copérnico, bajo esta concepción que se acertaba en el esteticismo del Renacimiento, considera circulares las órbitas de los planetas por la mayor belleza de esa figura. Y hasta Kepler, que sacrifica la bella circularidad ptolemaica y copernicana por la elipsis, se deja guiar por prejuicios estéticos y cree realmente en una "música celestial".

Antecedentes a la crítica moderna de la evidencia los encontramos en Heráclito, la Teología Racional y F. Bacon.

Cuando Heráclito dice: "A la naturaleza le gusta esconderse", está manifestando una vocación realista en la que se reconoce un progreso dialéctico de la naturaleza sólo asible por una lógica igualmente dialéctica y no fija. La verdad, en Heráclito, no es sencilla o clara, sino, por el contrario "oscure".

Cuando la Teología Racional levanta su sistema partiendo de unas premisas (artículos de fe) no solamente no-evidentes sino que contra-evidentes, está poniendo de manifiesto que la ciencia puede construirse sobre bases lejos de toda evidencia. La no-cientificidad de la Teología no es el carácter irracional de sus artículos de fe.

F. Bacon, cuando declara que el ser humano es constitutivamente perezoso y nos pone en guardia contra la evidencia, nos sugiere la posibilidad de que la verdad cueste.

Hasta tal punto no es evidente el que la verdad sea evidente, que se ha defendido, y más de una vez, la tesis contraria según la cual la verdad no es evidente, sino al contrario, que es oscura, difícil para la inteligencia.

Si se dice que la verdad es evidente, y la proposición "La verdad es evidente" no es evidente, se ha de concluir necesariamente en que la proposición "La verdad es evidente" no es verdad. Es uno de esos silogismos de la segunda figura, que la lógica tradicional llamaba "Camestres".

Si se dice que lo evidente es verdad, se vadea la contradicción anterior, pero se cae en un círculo vicioso. Por lo pronto "Lo evidente es verdad" tampoco es evidente, pero comoquiera que la proposición no dice que todas las verdades son evidentes, como la proposición que arriba considerábamos, queda abierta la posibilidad de que la proposición, sin ser evidente, sea sin embargo verdad. En otras palabras, se sostiene que todo lo evidente es verdad, pero que hay, o puede haber, verdades que no son evidentes. La primera formulación del criterio de la evidencia no aceptaba estas verdades, con lo cual le cerraba la puerta automáticamente a la Ciencia, que por lo general no cuenta más que con unas pocas proposiciones evidentes de las que deriva el resto. En esta segunda formulación del criterio de la evidencia, sin embargo, se divide a la verdad en dos grupos: las que son evidentes y las que no lo son. Estas verdades no-evidentes serían, justamente, las que tienen una razón suficiente, las verdades demostradas, los teoremas.

Así pues, la proposición "Lo evidente es verdad" necesita de una demostración. Pero, acontece lo siguiente, que independientemente de cuál sea esta demostración, siempre podremos preguntarnos por la garantía del principio de donde ha partido esa demostración, y tendremos que decir que esa garantía viene de otra demostración, porque en el instante en que digamos que no viene de una demostración sino de una evidencia, habremos caído en un círculo vicioso, porque ello equivale a demostrar que el criterio de la evidencia es legítimo si y sólo si el criterio de la evidencia es legítimo. Ahora bien, comoquiera que esta cadena de razonamientos no puede llevarse hasta el infinito, resulta que necesariamente desemboca en el vicio circular de demostrar una cosa tomándolo a ello mismo por supuesto.

El esquema anterior puede ilustrarse con el razonamiento de Descartes que avala la legitimidad del criterio de la evidencia. Descartes lleva a cabo la cuestión con un lenguaje metafórico que ha dado pie a que se le entienda mal. En efecto, su teoría del

genio maligno parece un poco cosa de broma, y sin embargo el problema es perfectamente serio. La posibilidad de un genio maligno, interroga por la legitimidad del criterio de la evidencia. ¿Qué tal, dice Descartes, que hubiera un genio maligno, un diocesito juguetón, que, por el mero placer de divertirse viendo al hombre caer en el error, se dedicara a crear proposiciones evidentes que sin embargo son falsas? ¿Qué me garantiza a mí que lo evidente es verdad? Y Descartes responde: Dios. El hecho de que Dios, como ser supremo y bondadoso, existe, es garantía suficiente para que se puede desecharse inmediatamente la hipótesis del genio maligno, pues Dios no iba a permitir que se me engañara así. Sería una broma demasiado cruel, en absoluto compatible con lo que de ordinario entendemos por Dios.

En resumen, que es la existencia de Dios la que, en la filosofía cartesiana, sostiene y demuestra la validez del criterio de la evidencia, la razón desde la cual se inicia su demostración. Pero, ¿qué es lo que me demuestra a Dios?

En Descartes, la existencia de Dios se demuestra, entre otras maneras -la ontológica de San Anselmo por ejemplo-, de la siguiente: Porque yo existo, en tanto que ser imperfecto, ser dudante, y me he encontrado y reconocido como tal, tengo que pensar que ya había en mí la idea de la perfección. Ahora bien, esta idea no puede haber salido de mí mismo, puesto que soy imperfecto; tiene, pues, que haberme la dado un ser efectivamente perfecto, y ese Ser es Dios. En otras palabras, que se demuestra la existencia de Dios a partir de mi propia existencia. Pero, ¿qué me demuestra a mí que yo existo?

La respuesta de Descartes es célebre: Nada, no me lo demuestra nada, se demuestra por sí solo, es evidente. (!!!)

Y aquí caemos en la cuenta de que Descartes parte precisamente de donde quiere llegar. De que para demostrar que lo evidente es verdad, ha tenido que partir de que lo evidente es verdad. En otras palabras, tal y como lo habíamos anunciado, se trata de un razonamiento circular, de un círculo vicioso.

Resumiendo toda esta crítica lógica, decimos: El criterio de la evidencia no es sostenible: O es una contradicción o es un círculo vicioso.

Esta crítica, sin embargo, se encuentra con la Teoría de los Niveles del Lenguaje obstaculizándole su legitimidad. Según esta teoría, una proposición no puede contarse entre aquello a lo cual hace referencia. En otras palabras, que una proposición no puede referirse a sí misma. Y la razón de ello se deriva de la distinción entre el signo y lo significado, entre el nombre y la cosa. O empleamos una proposición como nombre o la empleamos como cosa, lo que no podemos hacer, dice esta teoría, es emplearla simultáneamente como nombre y cosa. Y es eso, exactamente, lo que hemos hecho más arriba, al tomar la proposición "La verdad es evidente" (y después "Lo evidente es verdad") primero como nombre, y después, en la segunda premisa, al decir que ella no era evidente, como cosa.

Además, habíamos anunciado que una demostración lógica (que resultó ser, según acabamos de ver, problemática) no era la única manera con la que podíamos descalificar al criterio de la evidencia; podíamos así mismo hacer una mostración de hecho también con la misma finalidad.

Eso, con respecto a las razones en contra del criterio de la evidencia. Con respecto a los hechos, éstos:

A partir del siglo XIX son varios los sistemas que, partiendo de axiomas no-evidentes, se han construido con una solidez lógica tal, que a estas alturas, en la que ya nos aprovechamos de ellos, sería verdaderamente pueril cuestionarla. Entre estos sistemas están todos los de Lógica moderna y los de las Geometrías no-euclídeas. En otras palabras que, no aceptando el criterio de la evidencia, a base de construir mentalmente sobre axiomas lejos de

toda evidencia, se pueden lograr sistemas tan exactos, (me retracto: más exactos), que los sistemas que partían de axiomas evidentes. Así por ejemplo, la Geometría de Riemann parte del axioma de que por un punto fuera de una recta no pasa ninguna paralela a esa recta. Lo cual, por supuesto, no es nada evidente. La Geometría de Lobachevsky, por otra parte, acepta que por un punto fuera de una recta pasa un número infinito de paralelas a esa recta. En Lógica Simbólica pasa exactamente lo mismo. ¿Para quién podría ser evidente lo siguiente?: Si una proposición implica a otra, entonces todo ello implica que una tercera proposición o la primera implica la tercera o la segunda. O, todavía peor, esto otro: La incompatibilidad de una proposición con la incompatibilidad de una segunda proposición, con una tercera, es incompatible con la incompatibilidad de la incompatibilidad de la incompatibilidad de la cuarta proposición con la segunda, con la incompatibilidad de la incompatibilidad de la primera proposición con la cuarta, con la incompatibilidad de la primera con la cuarta.

Nadie tiene por qué entender esto. Ni aún expresándolo con los signos especiales y los símbolos lógicos que facilitan mucho lo que estas proposiciones dicen, siguen siendo completamente oscuras lejos de toda evidencia. Y sin embargo, la primera proposición es el quinto axioma del sistema lógico de Whitehead y Russell y el segundo es el axioma único de Nicod. Sobre estos axiomas se ha montado un sistema lógico tal que no podemos negar, ya que, como se dijo más arriba, nos estamos aprovechando de él en todo lo que el pensamiento moderno hace. De hecho, pues, podemos prescindir del criterio de la evidencia, como lo han hecho las Matemáticas y las Lógicas modernas.

43

Derogado el criterio de la evidencia, se eligen los axiomas de un lenguaje exacto según el siguiente criterio: Que los axiomas sean:

- a) consistentes
- b) independientes
- c) saturados

44

Decimos que unos axiomas son consistentes cuando no son contradictorios (ni, en consecuencia, dan lugar a contradicciones).

45

Decimos que un axioma es independiente cuando no se puede derivar de ningún otro (ni, en consecuencia, dé un teorema derivado).

46

Decimos que un conjunto de axiomas está saturado cuando todas las proposiciones formulables en su lenguaje pueden ser demostradas como verdaderas o como falsas.

47

Por otra parte, los términos primitivos no necesitan significado. De ellos es necesario sólo saber las relaciones que entre sí tienen y que se expresan en los axiomas.

48

Dice H. Pasch refiriéndose a la Geometría como lenguaje exacto: "Si la Geometría ha de ser deductiva, la deducción ha de ser totalmente independiente del significado de los conceptos geométricos al igual que los diagramas; sólo las relaciones especificadas en las proposiciones y definiciones pueden tenerse legítimamente en cuenta. Durante la deducción es conveniente y legítimo, pero de ningún modo necesario, pensar en el significado de los términos; en efecto, si ello fuera necesario, se pondría inmediatamente de manifiesto la incorrección de la prueba. Por otra parte, si un teorema ha sido rigurosamente derivado de un conjunto de proposiciones -el conjunto básico-, la deducción tiene un valor que va más allá de su propósito original. Puesto que si, reemplazando los términos geométricos en el conjunto básico de proposiciones, se obtienen proposiciones verdaderas, entonces los reemplazos correspondientes pueden hacerse en los teoremas; y de este modo obtenemos un nuevo teorema como consecuencia de las proposiciones básicas sin necesidad de tener que repetir la prueba".

49

Toda ciencia o lenguaje formal se apoya en la Lógica para regular las deducciones o derivaciones de los teoremas a partir de los axiomas.

50

"Las ciencias formales se caracterizan por el hecho de que los únicos principios que las gobiernan y legislan son las reglas de la Lógica y por el de que sus teoremas no tratan de ninguna fase del mundo existente sino de cualquier cosa que postule el pensamiento". Nagel.

51

En rigor, toda ciencia formal es una ampliación (de términos primitivos y axiomas) de la ciencia formal que es la Lógica.

52

Llamamos "interpretación" de un lenguaje o sistema exacto a la asignación de significado a sus términos primitivos de modo que los axiomas se conviertan en proposiciones verdaderas.

53

Llamamos "modelo" al resultado de una interpretación.

54

Llamamos "satisfacible" a un sistema, cuando admite por lo menos una interpretación.

I I I

Ejemplo de sistema exacto, que llamamos " $\Gamma$ " (Gamma). (Tomado de Introduction to the Foundations of Mathematics, de Raymond L. Wilder):

1

Términos primitivos: aba, daba.

Notación:  $m, n, o, \dots$  serán variables que admiten abas como valores.  $H, I, J, \dots$  variables que admiten dabas como valores.

2

Axiomas:

- I.- Toda daba es una colección de abas.
- II.- Hay por lo menos dos abas.
- III.- Si  $m$  y  $n$  son abas, entonces existe una y solamente una daba que contiene a  $m$  y a  $n$ .
- IV.- Si  $H$  es una daba, entonces existe una aba que no está en  $H$ .
- V.- Si  $H$  es una daba y  $m$  una aba que no está en  $H$ , entonces existe una y solamente una daba que contiene a  $m$  y a ninguna aba en común con  $H$ .

3

El axioma primero parece una definición, pero no lo es, porque toda colección de abas no es una daba.

4

Definición 11.º: Si la aba  $m$  es un elemento de la colección de

abas H, entonces decimos que "H contiene a m", "m está en H", o "H es una daba que contiene a m".

5

Definición 2<sup>o</sup>: Dos dabas son diferentes si y sólo si la una contiene por lo menos una aba que no está en la otra.

6

En el Sistema I' hay tres tipos de términos:

- a) los primitivos (aba, daba).
- b) los definidos (contiene a, es diferente de,).
- c) los no-definidos, pero cuyo significado se supone (de otro lenguaje, el lógico: colección, existe, todo, ..etc.).

7

El Sistema I' , por tanto, como todo sistema científico, está incardinado en el sistema lógico, que en el presente capítulo no presentamos con rigor sino traducido en su aspecto más general al lenguaje español.

8

Igualmente, están implícitas dentro de I' , las reglas lógicas de la deducción.

9

TEOREMA 1.- Toda aba está en por lo menos dos dabas.

Demostración:

- |  |                  |
|--|------------------|
| (1) m y n son abas cualquiera.             | (Ax. II)         |
| (2) H es una daba que contiene a m y n.    | (Ax. III)        |
| (3) o es una aba que no está en H.         | (Ax. IV)         |
| (4) Hay una daba I que contiene a o y a m. | (Ax. III)        |
| (5) H e I son dabas diferentes.            | (3) y (4)(Def.2) |
| (6) m está en H y en I.                    | (2) y (4)        |

(7) Pero  $m$  es una aba cualquiera, luego toda aba que contiene  $m$  está en por lo menos dos dabas. (1)

10

Corolario al Teorema 1: Toda daba contiene por lo menos una aba.

Que una daba sea una colección de abas no significa que tenga abas. Puede haber colecciones con un solo miembro y hasta con ninguno. El corolario, pues, no es trivial.

Demostración:

- (1) Hay por lo menos una daba  $H$  que no contiene abas. (Hipótesis)
- (2)  $m$  es una aba cualquiera. (Ax. II)
- (3)  $m$  está en dos dabas,  $I$  y  $J$ . (Teor. 1)
- (4)  $I$  y  $J$  no tienen ninguna aba en común con  $H$  y entre ellas mismas sí ( $m$ ). Y esto no puede ser. (Ax. 5)
- (5) Luego la hipótesis es incorrecta y por tanto la negación de la hipótesis es correcta:  
Toda daba contiene por lo menos una aba. (Neg. de la hipótesis)

11

TEOREMA 2.- Toda daba contiene por lo menos dos abas.

Demostración:

- (1) Hay alguna daba  $H$  que contiene a lo sumo una aba  $m$ . (Hipótesis)
- (2) La aba  $m$  está en por lo menos dos dabas,  $H$  e  $I$ . (Teor. 1)
- (3)  $I$  contiene una aba  $n$  que no está en  $H$ . (Def. 2)
- (4) Hay una aba  $q$  que no está en  $I$  (Y tam-

- co en  $H$ , porque se supuso que  $H$  contiene sólo a  $m$ . (Ax. IV)
- (5) Hay una daba  $J$  que contiene a  $\underline{p}$  y que no contiene a ninguna aba contenida por  $I$ . (Ax. V)
- (6) Hay dos dadas,  $I$  y  $H$ , que contienen una aba ( $m$ ) en común y que no contienen ninguna aba en común con la daba  $J$ , y esto contradice al axioma V. (Consec.)
- (7) (6) es falso. (Ax. V)
- (8) (1) es falso. (Red. al abs.)
- (9) Toda daba contiene por lo menos dos abas. (Neg. de la Hipótesis)

12`

Corolario al Teorema 2: Toda daba se determina completamente por dos abas cuyas cualesquiera, que sean distintas.

13

TEOREMA 3.- Hay por lo menos cuatro abas.

Demostración:

- (1) Hay dos abas,  $m$  y  $n$  que determinan la daba  $H$ . (Ax. II y Corolario al T.2)
- (2) Hay una aba  $\underline{p}$  que no está en  $H$ . (Ax. IV)
- (3) Hay una daba  $I$  que contiene a  $\underline{p}$  y a ninguna aba en común con  $H$ . (Ax. V)
- (4) La daba  $I$  contiene por lo menos otra aba,  $p$ . (Teor. 2)
- (5) Hay por lo menos cuatro abas. (1), (2), (4).

TEOREMA 4.- Hay por lo menos seis dadas diferentes.

Demostración:

- |     |   |                 |
|-----|---|-----------------|
| (1) | Hay por lo menos cuatro abas, m, n, o,<br>p.        | (Teor. 3)       |
| (2) | m y n determinan la dada H.                         | (Corol. al T.2) |
| (3) | m y o determinan la dada I.                         | ( " " " " )     |
| (4) | m y p determinan la dada J.                         | ( " " " " )     |
| (5) | n y o determinan la dada K.                         | ( " " " " )     |
| (6) | n y p determinan la dada L.                         | ( " " " " )     |
| (7) | o y p determinan la dada M.                         | ( " " " " )     |
| (8) | H, I, J, K, L, M, son todas diferentes<br>entre sí. | (Defin. 2)      |
| (9) | Hay por lo menos seis dadas diferentes.             | (8)             |

El lenguaje o sistema exacto  $\Gamma$  es susceptible de ser interpretado de diversos modos: 1.) Asignándole a aba el significado de "punto" y a dada el de "línea recta", los axiomas se convierten en proposiciones verdaderas:

Axioma I: Toda línea es una colección de puntos.

" II: Existen por lo menos dos puntos.

.....

" V: Si H es una línea, y m un punto que no está en H, entonces existe una y solamente una línea que contiene a m y a ninguna aba en común con H.

Definiendo "líneas paralelas" como líneas que no contienen ningún punto en común, vemos que este quinto axioma es el de las paralelas.

Bajo la interpretación anterior,  $\Gamma$  se convierte en un modelo geométrico, y todos sus teoremas en proposiciones verdaderas de la Geometría.

Ha de distinguirse, pues, con rigor, una ciencia abstracta de un modelo de esa ciencia. Refiriéndose a la Geometría, dice Grassmann: "es el fundamento abstracto de la doctrina del espacio, es decir, que es ajena a toda intuición espacial siendo una disciplina puramente matemática, cuya aplicación al espacio da la ciencia del espacio. Esta última ciencia, puesto que se refiere a algo dado en la naturaleza (esto es, el espacio), no es una rama de la Matemática sino una aplicación de la Matemática a la naturaleza".

Cuando Bertrand Russell dice que: "La Matemática es una ciencia en la que nadie sabe lo que se dice, ni si lo que se dice es verdadero o falso", está diciendo en broma lo rigurosamente verdadero.

2.) Otra interpretación posible para  $\Gamma$  es la siguiente: Supongamos una ciudad Z con cuatro habitantes sólo: a, b, c, d. Y supóngase que cada par de habitantes forman un club en el que se excluyen los otros dos habitantes. Entonces, dándole a aba el significado de habitante de Z, y a daba el de club en Z, los axiomas se convierten en proposiciones verdaderas.

3.) Cualquiera conjunto de cuatro elementos puede formar un modelo de  $\Gamma$  si aba es uno de esos elementos y daba un par de ellos.

7

La demostración de un teorema de un sistema exacto es la demostración automática del teorema correspondiente en todos los modelos de ese sistema.

8

La dirección que va del sistema al modelo se invierte en la creación de la ciencia. Partimos de la experiencia de lo concreto y nos elevamos al pensamiento de lo abstracto, para caer de nuevo sobre el mundo de la experiencia.

9

La ciencia emerge de la realidad y revierte a la realidad. Esta es la concepción realista de la ciencia. Para la idealista, es una creación del intelecto que no necesita aplicabilidad.

## I V

En esta sección tratamos con mayor detenimiento las tres propiedades que toda ciencia exacta debe tener: consistencia, independencia, saturación.

### 1

Hemos de distinguir entre contradicción formal y contradicción dialéctica. La primera es la conjunción de dos proposiciones, en una de las cuales se niega lo que en la otra se afirma. Ej.: "María es inteligente y María no es inteligente".

### 2

La contradicción dialéctica es el proceso real mediante el cual dos cosas chocan y se transforman en una tercera (síntesis). Entre el sistema burgués moderno y las formaciones económico-sociales feudales, medievales, hubo evidente contradicción dialéctica. La misma se supera, es decir, se cancela en las revoluciones democrático-burguesas que inician la etapa de la historia contemporánea.

### 3

Sin contradicción dialéctica no hay progreso o cambio posible, pues únicamente porque se atenta contra las cosas es que éstas cambian. Un árbol, en el que se eliminan todas las contradicciones, dejaría de crecer. Ni siquiera moriría.

### 4

Ejemplo: En una conversación (diálogo) Pedro defien-

de la tesis: "María es inteligente", que Juan le contradice dialécticamente: "María no es inteligente" (antítesis). De esta polémica o contradicción dialéctica surge una conclusión (síntesis). Pero de la contradicción formal: "María es inteligente y María no es inteligente" no surge nada.

5

"La guerra (contradicción dialéctica) es la madre de todas las cosas", Heráclito. La contradicción dialéctica es el motor del mundo y de la historia, pero la contradicción formal es la muerte del discurso. De ahora en adelante, por contradicción entenderemos contradicción formal.

La exigencia de consistencia o no-contradicción, sin embargo, no es darle prioridad al llamado principio de no-contradicción, (en la Lógica Moderna es teorema y no principio), sino pedir que la ciencia tenga sentido. Porque una ciencia minada por la contradicción lo puede demostrar todo, y una ciencia donde todo es demostrable carece de sentido.

7

Partiendo del siguiente axioma de la Lógica Moderna: " $\vdash \neg q \supset p \vee q$ ", podemos demostrar que si hay una contradicción cualquiera (" $q \supset \sim q$ "), cualquiera y en consecuencia, toda proposición "p" es demostrable:

- |     |                                  |                          |
|-----|----------------------------------|--------------------------|
| (1) | $\vdash \neg q \supset p \vee q$ | (Axioma)                 |
| (2) | $\vdash \neg q \supset q \vee p$ | (Conmutación)            |
| (3) | $\vdash \neg q \supset q \vee p$ | (Def. de la condicional) |
| (4) | $\vdash \neg q \supset \sim q$   | (Hipótesis)              |
| (5) | $\vdash q$                       | (Simplificación (4))     |
| (6) | $\vdash \sim q$                  | (Simplificación (4))     |
| (7) | $\vdash \sim q \supset p$        | (Modus ponens (3)(5))    |
| (8) | $\vdash p$                       | (Modus ponens (6)(7))    |

Como "p" y "q" son variables para cualquier proposición, queda demostrado que si hay una contradicción cualquiera "q y no q", está demostrada cualquier proposición "p".

9

Lo anterior puede explicarse más informalmente de la siguiente manera:

- (1) Las disyunciones, proposiciones compuestas del tipo de ...ó..., son verdaderas cuando por lo menos uno de sus términos es verdadero. Ej.: "Juan estudia o María come", es verdadero, por ejemplo, si María come aunque no sea verdad que Juan estudia.
- (2) En consecuencia, si una disyunción verdadera tiene un término falso, el otro término es necesariamente verdadero.
- (3) Ahora bien, si un sistema puede demostrar como verdadera una proposición cualquiera "q", entonces la disyunción "q ó p" (donde "p" es otra proposición cualquiera) es verdadera (1).
- (4) Si a continuación el mismo sistema, donde ya es verdadero "q ó p", puede demostrar igualmente que "q" es falsa, se concluye por (2) que el otro término "p" es verdadero.

En resumen, que: Si un sistema puede demostrar como verdadera y como falsa (contradicción formal) una proposición "q" cualquiera, entonces puede demostrar como verdadera cualquier otra proposición "p". Es decir, que si en un sistema hay una contradicción, todo es demostrable. Que es lo que se quería demostrar.

10

Una ciencia con una contradicción, pues, no es una ciencia con un error, sino una ciencia que no vale nada. Una con-

tradición es peor que algo malo, es algo que mata.

11

Hubo una época en que las contradicciones en la Lógica y la Matemática (Epiménides, el poeta cretense; los argumentos de Zenón; las aporías del infinito, etc...; por ejemplo) eran objeto de curiosidad y motivo de diversión. Hoy en día, en cambio, son cosas graves que comprometen a la Lógica y a la Matemática entera.

12

La urgente necesidad de desterrar de la Matemática la contradicción fue el estímulo para el cultivo de la Lógica Moderna.

13

Se ha demostrado que: si un sistema es contradictorio, todo es demostrable. En consecuencia, si no todo es demostrable, el sistema no es contradictorio. En consecuencia, si podemos demostrar que hay algo que no es demostrable, hemos demostrado que el sistema es consistente. A esta prueba la llamamos "prueba formal o sintáctica de consistencia".

14

La prueba formal de consistencia o no-contradicción es más difícil de lo que aparenta, porque una cosa es encontrar algo indemostrable y otra muy distinta demostrar que algo no se puede demostrar.

15

Otra forma de demostrar la consistencia de un sistema es desplegando todos los teoremas, para verificar si entre ellos hay dos contradictorios. Este método es aún más inadecuado que la prueba formal.

Además, este segundo método es, en el mejor de los casos, adecuado para diagnosticar inconsistencia (en cuanto aparezca una contradicción). Pero no es práctico para diagnosticar consistencia, porque del hecho de no haber hallado una contradicción no se puede inferir que no las haya. Este método, pues, es un criterio negativo. Nos dice cuándo no (hay consistencia), pero no cuándo sí.

Un tercer método para demostrar la consistencia de un sistema es el que llamamos "prueba material o semántica de consistencia". Esta prueba supone que la realidad no es formalmente contradictoria, y que por consiguiente el sistema abstracto que tenga un modelo real estará libre de contradicción. En consecuencia, encontrarle un modelo a un sistema es probar su consistencia. Es decir, si un sistema es satisfacible, es consistente.

Puede darse el caso de que el modelo de un sistema A sea un modelo ideal, otro sistema B; cuando ese es el caso, la consistencia del sistema A se garantiza únicamente si se puede garantizar la del sistema B. Para garantizar la del sistema B habría que encontrarle un modelo, que puede a su vez ser igualmente ideal, etc..., hasta llegar a una aplicación técnica, un contacto con la realidad, que garantice la **consistencia**.

Las pruebas formal y material, comentadas arriba, son pruebas para hallar la consistencia y no para diagnosticar contradicción en caso de que la prueba falle. Es decir, que la demostración de la indemostrabilidad de algo, y el tener un sistema un modelo al menos, son ambas condiciones suficientes con respecto a la consistencia, pero no necesarias. O sea que la demostrabilidad de algo no prue-

ba, naturalmente, ~~la~~ inconsistencia o contradictoriedad del sistema. De igual forma, no tener un modelo un sistema no implica tampoco su inconsistencia. Hay sistemas que tardan en realizarse técnicamente en un modelo (Lógica trivalente), o que no han llegado todavía a ello. La no-aplicabilidad, pues, no es razón para desechar un sistema.

20

La demostración de consistencia de un sistema debe efectuarse fuera de ese sistema (en un sistema cuya consistencia esté ya asegurada), por la misma razón por la que no se le puede preguntar a una persona si es mentirosa, porque si lo es dirá que no lo es.

21

La consistencia del sistema  $\mathcal{S}$  está garantizada por sus modelos.

22

Por otra parte, decimos que un axioma es independiente cuando no se puede derivar o deducir de los otros axiomas.

23

Tampoco debe poder derivarse la contradictoria del axioma, porque si ese fuera el caso, el sistema no sería consistente.

24

Cuando un axioma es independiente, quiere decir que introduce información nueva no contenida en los otros axiomas.

25

Si  $S$  es un conjunto de axiomas, uno de los cuales es  $A$ , y  $S-A$ , el sistema de axiomas en cuestión cuando se le ha sacado  $A$ ,

entonces una prueba de independencia del axioma A en el sistema S, es demostrar la consistencia del sistema S y la del sistema  $(S-A) + \text{no-A}$ , donde "no-A" es un axioma contradictorio de A.

26

Por la siguiente razón:

- |  |   |
|--|---|
| (1) S es consistente                     | (Hipótesis)                                   |
| (2) $(S-A) + \text{no-A}$ es consistente | (Hipótesis)                                   |
| (3) no-A no se deduce de S-A             | (Porque de poder hacerse,<br>(1) sería falso) |
| (4) A no se deduce de S-A                | (Porque de poder hacerse,<br>(2) sería falso) |

En consecuencia, si (1) y (2), ni A ni no-A se deducen de S-A. De otro modo, si (1) y (2), A es independiente en S.

27

Como ejemplo, demostremos la independencia del V axioma en el sistema I. El primer paso, la demostración de que I es consistente, está ya dado cuando le encontramos un modelo. Para dar el segundo, hay que derogar del sistema el V axioma y añadirle uno contradictorio, y demostrar entonces que este nuevo sistema  $(I - V) + \text{no-V}$ , es consistente.

28

La siguiente proposición es una contradicción del V axioma: "Si H es una daba y m una aba que no está en H, entonces no existe ninguna daba que contiene a m y a ninguna aba en común con H".

29

Este nuevo sistema es interpretable de la siguiente forma: Supóngase que existen solamente 3 monedas, y que aba significa una moneda de esa colección, y daba un par de monedas de esa co-

lección. Bajo esta interpretación todos los axiomas se satisfacen logrando con ella un modelo. En consecuencia, el nuevo sistema es consistente. En consecuencia el V axioma es independiente en  $\Gamma$ .

30

Repárese en que el sistema  $(\Gamma - V) + \text{no-V}$ , interpretado geométricamente, da una geometría no-euclídeana en la que no existen rectas paralelas.

31

La independencia, sin embargo, no es una propiedad indispensable. Es sólo por razones de economía y de elegancia que se desea la independencia de todos los axiomas de un sistema.

32

Muchas veces, ampero, un teorema de difícil y larga demostración es presentado como axioma (por supuesto, no-independiente) para ahorrarse el trabajo de su demostración o porque pedagógicamente conviene desplazarla para después.

33

La última propiedad que ha de tener un sistema de axiomas es la saturación. Decimos que un sistema de axiomas está saturado o que es completo, cuando toda proposición formulada en el lenguaje de ese sistema y bien construída sintácticamente, y que no es uno de los axiomas, puede ser demostrada en ese sistema o como verdadera o como falsa.

34

Dicho de otro modo: Un sistema S está saturado o completo si no hay una proposición A de ese lenguaje tal que A es un axioma independiente en el sistema S+A. Es decir, que un sistema de axiomas está saturado si es imposible añadirle un axio-

ma independiente.

35

El sistema  $\Gamma$ , por ejemplo, no está saturado, porque se le podría añadir el siguiente axioma A: "Existen, a lo sumo, cuatro abas".

36

Que este axioma es independiente en  $\Gamma$  se demuestra encontrando un modelo para los sistemas  $\Gamma + A$  y  $\Gamma + \text{no-}A$ . En efecto, la interpretación de aba como habitante de Z y daba como club en Z da un modelo para  $\Gamma + A$ , y la interpretación geométrica euclidiana de punto para aba y línea recta para daba, un modelo para  $\Gamma + \text{no-}A$ .

37

Para dar un método que nos permita demostrar la saturación de un sistema necesitamos tres conceptos: correspondencia 1-1, isomorfismo y categoricidad.

38

Dos conjuntos o colecciones están en una correspondencia de uno a uno (1-1) si a cada elemento de una de las colecciones corresponde uno y solamente uno de la otra colección, y a cada elemento de esta segunda colección, uno y solamente uno de la primera.

39

Por otra parte, decimos que dos modelos de un sistema S son isomórficos con respecto a S si a cada proposición de uno de los modelos corresponde otra del segundo modelo exactamente igual en todo sentido salvo en el semántico, y si hay una correspondencia 1-1 entre los dos modelos considerados como colecciones (de eso de que tratan)

40

Por último, decimos que un sistema  $S$  es categorico si cada par de modelos suyos son isomórficos con respecto a  $S$ .

41

Ahora bien, si un sistema es categorico, entonces está saturado. Basta, por tanto, mostrar la categoricidad de un sistema para tener asegurada su saturación.

42

Que la categoricidad implica la saturación se demuestra de la siguiente forma:

Si un sistema no está saturado, entonces hay una proposición  $A$  que puede ser añadida a  $S$  como axioma independiente, es decir que  $S+A$  y  $S+\text{no-}A$  son sistemas consistentes. Sea  $M_1$  modelo de  $S+A$  y  $M_2$  modelo de  $S+\text{no-}A$ . Pero  $M_1$  es también modelo de  $S$ , porque la interpretación que hace verdaderos los axiomas  $S+A$  hace también verdaderos, a fortiori, los axiomas  $S$ . Y por la misma razón,  $M_2$  es modelo de  $S$ . Pero  $M_1$  y  $M_2$  no son isomórficos con respecto a  $S$ , porque  $A$  es verdadero en  $S+A$  pero falso en  $S+\text{no-}A$ . Luego,  $S$  no es categorico. Se ha demostrado, así, que si un sistema no está saturado, no es categorico. Y, en consecuencia, que si un sistema es categorico, entonces está saturado. Que es lo que se quería demostrar.

43

La teoría de un lenguaje sin significado es fecunda para el estudio de todo lo que es, aunque sea en parte sólo, estructura, forma, orden (sintaxis).

44

Todo cuanto puede ser correcto o incorrecto, verdadero o falso (sintácticamente), es un lenguaje y puede carecer de significado.

45

El arte es un lenguaje, la religión es un lenguaje, la vida es un lenguaje.

46

Cabe un arte sin significado, una religión sin significado, una vida sin significado.

47

El no tener significado de un lenguaje está en proporción directa con el poder tener muchos significados (interpretaciones).

48

El arte abstracto, la religión abstracta, la vida abstracta, la ciencia abstracta, asedian la realidad desde distintos frentes a la vez.

49

La pluralidad de modelos de un lenguaje sin significado no se funda en la concepción idealista de que a la realidad se la puede obligar a que baile al son que se le toque, sino en el supuesto materialista de que la realidad es más rica que cualquier aproximación conceptual a ella.

50

La concepción idealista desemboca en la visión de la verdad como absoluta (ab-suelta, desamarrada) accesible sólo a la intuición mística repentina y de una vez por todas. La concepción materialista-dialéctica, en cambio, desemboca en la visión de la verdad interconectada, sistemática, demostrada, ganada de palmo en palmo, paso a paso, y sujeta siempre a la reforma de los principios.

51

Saber la verdad no basta, hay que saber saberla.

