

# INTRODUCCION

A LA

LOGICA

MODERNA

A  
0  
85  
1

*...  
...  
... práctica  
... mismo.*

JOSE DE JESUS MARTINEZ



Jany et. Bernal S

1963

Cross de V. ...

Universidad M.

**PORTADA DE ALBERTO DUTARY**

IMPRESO EN LOS TALLERES LITOGRAFICOS DE  
IMPRESORA PANAMA, S. A.

**JOSE DE JESUS MARTINEZ**

PROFESOR DE LOGICA EN EL INSTITUTO FERMIN NAUDEAU  
Y EN LA UNIVERSIDAD DE PANAMA

**INTRODUCCION**  
**A LA**  
**LOGICA MODERNA**

PUBLICACIONES DEL  
**INSTITUTO DE FILOSOFIA E HISTORIA**  
PANAMA, 1962

BIBLIOTECA NACIONAL



Número de  
Identificación

Número de  
Aumento

160

1,650

**Mar**

**e. 1**

Lea este libro brevemente y devuélvalo a la Biblioteca  
cuanto antes.

PRESCRIPCIONES GENERALES

- 1.—No tome nunca el libro con las manos sucias.
- 2.—No se moje los dedos para volver sus páginas.
- 3.—No aje las esquinas ni doble las páginas para señal.
- 4.—No lo mutile ni le haga notas marginales.
- 5.—No lo abandone abierto ni lo deje en lugar inseguro; recuerde usted responde por él.

Para Ricaurte Soler,  
joven maestro,  
amigo cariñoso,  
intelectual auténtico.



## P R E F A C I O

El objetivo que este libro se propone es el de introducir, despacio, en la Lógica Moderna a los estudiantes de secundaria y universitarios, y también a los profesionales necesitados o curiosos de lo que el estudio de la lógica puede ofrecer: claridad, rigor y una técnica potente y asombrosa para analizar y manejar los razonamientos.

Los capítulos marcados con doble asteriscos abarcan todo lo exigido por esa parte del programa oficial de lógica para el VI año del bachillerato dedicada a la Lógica Moderna. Los marcados con uno sólo, dan información importante para el cabal entendimiento de ellos y deben, por tanto, leerse. Los otros van un poco más adentro en la disciplina y están dedicados a los estudiantes universitarios. En todos los capítulos abundan los ejemplos y al final de algunos de ellos en los que tal cosa conviene, se han puesto bastantes ejercicios cuyas respuestas aparecen al final.

La índole del libro ha hecho recomendable detenerse prolijamente en los detalles básicos de esta disciplina, importante desde siempre pero hoy en día indispensable, al igual que en aque-

llos aspectos suyos en donde desemboca en la práctica. Se ha procurado, igualmente, complementar esta abertura a la práctica mediante esa fundamentación realista de la lógica que siempre exige el que estima, vive, trabaja, piensa y sufre la realidad.

Los capítulos de este primer tomo son:

- Introducción.
- Proposiciones primarias y secundarias.
- Formalización del lenguaje.
- Los operadores lógicos proposicionales.
- Los puntos.
- Otras notaciones y los operadores de Sheffer.
- La traducción.
- Las tablas.
- El método de Quine.
- Las transformaciones.
- El método de Post.
- Las formas normales.

Los del segundo:

- Las tautologías.
- La demostración.
- El cálculo de proposiciones.
- El cálculo de clases.
- El cálculo de predicados.
- El cálculo de relaciones.
- La lógica aristotélica.
- La matemática.
- Aplicaciones de la lógica a los circuitos eléctricos.

Expreso público agradecimiento al Profesor Agustín Colamarco, de la Universidad de Panamá, y al Profesor Ricaurte Arcia, Director del Instituto Fermín Naudeau. Sin el apoyo, la cordialidad y la inteligencia de estos dos profesores tan preocupados por la educación y la cultura en nuestro país, este modesto libro no habría sido posible. Tengo confianza en que los jóvenes lo acojan con el entusiasmo que tan justamente merece la belleza, la precisión y la elegancia de la Lógica Moderna.

## I N T R O D U C C I O N . - \*

Los últimos cien años han sido un verdadero renacimiento para la lógica. Aquella opinión, expresada por Kant, de que la lógica había nacido adulta, terminada, perfecta, de las manos de Aristóteles, fue abandonada en la pasada centuria iniciándose entonces un enfoque nuevo de la disciplina bien rico en descubrimientos.

Este enfoque nuevo de una cuestión vieja se inspiró en la matemática, desde siempre célebre por su claridad y exactitud. La idea generadora, matriz de la lógica moderna, fue la de aprovechar el cálculo algebraico matemático dándole otra interpretación. Es decir, que a las letras (variables)  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , etc..., se las tomó como representantes, no ya de cantidades como era lo usual, sino de cosas y de acontecimientos. Bajo esta novedosa interpretación del álgebra, la variable  $x$ , por ejemplo, podía tener el valor de caballos (en tanto que concebidos mentalmente; es decir, el concepto de caballo), o bien el del hecho o acontecimiento de ser los caballos animales. (Es decir, la proposición: "Los caballos son animales"). El resultado, el álgebra booleana, llamada así en honor a George Boole (1815-1864),

su principal creador, fue un álgebra que permitía, con perfecto sentido y aplicabilidad, la suma, la resta y la multiplicación de conceptos y de proposiciones (cosas y acontecimientos), y todo ello con la misma exactitud con la que el matemático sumaba, restaba y multiplicaba números. Es decir, que en el fondo el descubrimiento de Boole y el inicio de la lógica moderna, fue la comprobación de que el álgebra no derivaba su validez de su contenido, de la naturaleza del número con la que tradicionalmente había funcionado, sino que de su propia estructura formal, de las propias Leyes del Pensamiento. (Es el título del libro, ya clásico, de Boole). En definitiva, el gran hallazgo fue la independencia y libertad del álgebra con respecto al número; la noticia, bien sorprendente, de que tendría sentido que haya álgebra aun cuando no existieran números.

Y además, claro está, de que se podía traer un poco de claridad y rigor al pensamiento humano, desterrando aquellos razonamientos vagos entre cuyas ambigüedades se colaban los absurdos.

Desde entonces, la dedicación constante y fecunda, por parte de grandes pensadores como Schröder, Whitehead, Russell, Hilbert, etc..., al álgebra booleana, llamada también logística, álgebra lógica, lógica simbólica, lógica matemática o, más simplemente, lógica moderna, la ha transformado mucho. Ya no des-cansa o parte de los principios matemáticos. Muy por el contrario, ha logrado llegar a ellos, demostrarlos como teoremas, partiendo de sus propios principios. De modo que hoy en día, más que de lógica matemática habría que hablar de matemática lógica.

---

La lógica ya no es matemática, como lo fue para Boole. Es la matemática la que se ha hecho lógica, logrando, al fin, la fundamentación realista cuya falta le había dado aquella tendencia suya notoria al idealismo y, en algún caso, (Pitágoras), a la religión. No existe, hoy, tratado moderno de matemática que no comience dando nociones de lógica. Por supuesto, lo que decimos de la matemática habría que decirlo igualmente de toda ciencia que aspire al rigor.

Conserva la lógica de la matemática, empero, (su progenitora histórica, que ya no sistemática), el empleo de una notación muy elaborada y a veces semejante a la suya, que le permite, contra lo que podría pensarse, presentarse a la inteligencia con mayor claridad, economía y precisión. No debemos dejarnos embaucar por esa "selva de signos" creyendo que se trata de algo difícil. Esos signos, necesariamente raros todavía por lo novedosos, están allí con el solo propósito de presentar con claridad a la disciplina que más que cualquiera ama la claridad y que debe ser bien fácil, porque razonar, después de todo, es algo que hacemos más o menos bien desde los siete años de edad. Por otra parte, ¿qué es el lenguaje con el que hablamos, pensamos y vivimos, si no una serie de signos? La única diferencia entre estos y los que la lógica emplea es que los de la lógica son más fáciles.

La lógica moderna parte del supuesto de que el lenguaje está estrechamente emparentado con el pensamiento. (Platón llegó a decir que hablar y pensar eran una y la misma cosa). Por ello,



en vez de ponerse a la difícil tarea de estudiar algo tan problemático y difícil de aislar como es el pensamiento, lo estudia desde el lenguaje mismo, puesto que en él estarán traducidas todas sus características. Y esto lo hace la lógica buscando justamente ser más clara y más fácil. Tratar al lenguaje, que es cosa material, bien manuable, que puedo poner en un papel o en una pizarra sin que salga huyendo obligándome a perseguirlo, es cosa a todas luces más fácil que estudiar al pensamiento tan huidizo y sutil.

PROPOSICIONES PRIMARIAS  
Y SECUNDARIAS . -

El mundo está lleno de cosas. (Juan, Pedro, María, aquellos caballos, esos libros, esos mortales, etc...). Pero estas cosas no están aisladas las unas de las otras sino relacionadas, conectadas. (María está enamorada de Juan. Los caballos son mortales. Etc...). A estas relaciones les llamamos hechos o acontecimientos. El mundo se compone, pues, de cosas y de hechos. Nada más. Ahora bien, comoquiera que los hechos también están relacionados (Si María está enamorada de Juan, Pedro se enoja con Juan. Etc...), podemos decir que el mundo se compone de relaciones, y que hay dos clases de relaciones: relaciones entre cosas y relaciones entre hechos.

El hombre no está cerrado, sino abierto al mundo. Su razón refleja todo lo que en el mundo hay: cosas y hechos.

Al reflejo racional de las cosas en sus relaciones les llamamos conceptos, y al de los hechos, juicios. La razón hace, con los conceptos y los juicios, lo que la realidad con las cosas y los hechos: relacionarlos. Tanto las relaciones entre conceptos como las relaciones entre juicios, son juicios. Hay, pues, dos clases de juicios: juicios que relacionan conceptos (que llamamos juicios

simples) y juicios que relacionan juicios (que llamamos juicios compuestos -se entiende que de otros juicios-).

El hombre da todo lo que recibe. Las cosas, que su razón recibe como conceptos, las da como palabras (que significan -mediante los conceptos- esas cosas). Los hechos, que recibe como juicios, los da como proposiciones (enunciativas). Este lenguaje compuesto de palabras (que reflejan los conceptos que reflejan las cosas) y de proposiciones (que reflejan los juicios que reflejan los hechos) hace con las palabras y las proposiciones lo mismo que la razón con los conceptos y los juicios y lo mismo que la realidad con las cosas y los hechos: relacionarlos. Tanto las relaciones entre palabras como las relaciones entre proposiciones, son proposiciones. Hay, pues, dos clases de proposiciones: proposiciones que relacionan palabras (que significan -mediante los conceptos- cosas), que llamamos proposiciones primarias o generales, y proposiciones que relacionan proposiciones, que llamamos proposiciones secundarias o elementales.

Así, por ejemplo, la proposición:

Los hombres son mortales.

Es primaria o general, porque expresa una relación entre las palabras "hombre" y "mortal". En tanto que la proposición:

Si Pedro pone el agua al fuego, entonces el agua hierve.

Es secundaria o elemental, porque expresa una relación entre las proposiciones "Pedro pone el agua al fuego" y "El agua hierve".

Realidad	Razón	Lenguaje
Relaciones (hechos) entre..... { Cosas Hechos	Relaciones (juicios) entre..... { Conceptos Juicios	Relaciones (proposiciones) entre.. { Palabras Proposiciones

La razón se interesa en el mundo o realidad, el lenguaje en la razón, y la lógica en el lenguaje. La lógica se interesa en el lenguaje porque refleja a la razón (lo estudia en tanto que reflejo de la razón y no como lo hace la filología, por ejemplo), y le interesa la razón porque refleja al mundo. El interés de la lógica en la razón y el mundo es indirecto. En todo caso, prefiere estudiarlos en la forma más modesta pero segura y científica: reflejados en el lenguaje, especialmente el escrito.

Si la lógica estudia el lenguaje, y el lenguaje se compone de proposiciones, y hay dos clases de proposiciones, parece conveniente dividir a la lógica en dos partes, una que se haga cargo del estudio de las proposiciones primarias y otra de las secundarias. La parte de la lógica que estudia las proposiciones primarias (relaciones entre conceptos) se la llama lógica de clases o de conjuntos, (las clases -conjuntos- son conceptos), y a la parte que estudia las proposiciones secundarias o elementales se la llama lógica proposicional.

Esta segunda parte tiene una prioridad sistemática -no cronológica- sobre la primera y conviene comenzar por ella.

## F O R M A L I Z A C I O N   D E L   L E N G U A J E . - \* \* \*

En español, y en cualquier otro lenguaje, las proposiciones se relacionan mediante unas palabras especiales que no tienen sentido por sí solas y que se llaman sincategoremáticas. Tales son, por ejemplo, las palabras "o", "y", "si..., entonces...", "si, y sólo si", "a menos que", "pero", "sin embargo", etc... Con estas palabras o términos sincategoremáticos, que podemos llamar también términos lógicos, unimos, conectamos, relacionamos, dos proposiciones para formar otra proposición. Considérense, aisladamente, las siguientes proposiciones:

María está enamorada de Juan.  
Pedro se enoja con Juan.

Podemos conectarlas, relacionarlas, mediante cualquiera de los términos lógicos aludidos, de lo que resulta otras proposiciones:

- (1) María está enamorada de Juan o Pedro se enoja con Juan.
- (2) María está enamorada de Juan y Pedro se enoja con Juan.
- (3) Si María está enamorada de Juan, entonces Pedro se enoja con Juan.
- (4) María está enamorada de Juan si, y sólo si Pedro se enoja con Juan.

(Después consideraremos los otros términos lógicos). A pesar de estar estas proposiciones compuestas, compuestas de las mismas proposiciones, son bien diferentes.

En español, a las proposiciones compuestas por dos proposiciones unidas por "o", como (1), se las llama disyunciones. A las que son como (2), es decir, compuestas por dos proposiciones unidas por "y", se las llama conjunciones. A las que son como (3), condicionales, y a las que son como (4), bicondicionales, (ya veremos por qué).

Las tres proposiciones siguientes son disyunciones:

Pedro estudia o el agua hierve.  
 María estudia o Pedro pone el agua al fuego.  
 $a \leq b$

El tercer ejemplo, tomado del lenguaje matemático, se lee: "a es menor o igual que b", lo cual es una abreviatura de: "a es menor que b o a es igual que b".

Las tres proposiciones siguientes son conjunciones:

Pedro estudia y el agua hierve.  
 María viaja y Pedro pone el agua al fuego.  
 $a > b$  y  $b > c$

Las tres siguientes son condicionales:

Si estudias, entonces sacarás buena nota.  
 Si pones el agua al fuego, entonces hierve.  
 Si multiplicamos dos números negativos, entonces el resultado es un número positivo.

Y las tres siguientes, bicondicionales:

Pedro viaja si, y sólo si María estudia.  
 $a > b$  si, y sólo si  $b < a$   
 Dos triángulos son semejantes si, y sólo si dos de sus ángulos correspondientes son iguales.

A todos estos términos lógicos considerados ("o", "y", "si..., entonces", "si, y sólo si") los podemos llamar binarios porque conectan dos proposiciones. Hay otro término lógico muy importante que también sirve para hacer proposiciones compuestas, pe-

ro con una sola proposición. Es la expresión: "No es el caso que...". A estas proposiciones compuestas les llamamos negaciones. Las siguientes, por ejemplo, lo son:

No es el caso que María estudia.  
No es el caso que Berlín es la capital de Panamá.  
No es el caso que el agua hierve.

No consideramos la expresión: "Sí es el caso que...", o "Es verdad que...", porque, en rigor, no hacen nada lógicamente sino sólo retóricamente. Las proposiciones "María estudia" y "Sí es el caso que María estudia" son diferentes sólo desde el punto de vista de la retórica, no de la lógica.

Por último, conviene poder distinguir entre proposiciones como "No es el caso que María estudia" y "María no estudia". La primera es una negación, es decir, una proposición negada. La segunda es una proposición negativa, es decir, una proposición cuyo predicado está negado. La lógica proposicional se interesa sólo en la primera. (Que puede ser, por supuesto, la negación de una proposición negativa). Sin embargo, en aras de la claridad y de un español más familiar, emplearemos proposiciones negativas en las veces de negaciones en los casos en que esto sea legítimo y conveniente.

Por otra parte, es evidente que habríamos podido ilustrar lo mismo con negaciones, disyunciones, conjunciones, condicionales, bicondicionales, compuestas de proposiciones que son también a su vez proposiciones compuestas. Un ejemplo sólo para cada cual:

(5) No es el caso que Pedro estudia y que María viaja.

Es una negación igualmente, sólo que esta vez de una proposición

compuesta (conjunción).

- (6) Pedro estudia y no es el caso que María viaja, o me han dado una noticia falsa.

Es una disyunción, una de cuyas proposiciones que la componen -la primera- es una conjunción, (la cual, por cierto, está compuesta de dos proposiciones una de las cuales -la segunda- está negada).

- (7) Me he encontrado con Pedro en el cine y le he visto con Juan o con Enrique.

Es una conjunción, una de cuyas proposiciones que la componen -la segunda- es una disyunción.

- (8) Si  $a > b$  y  $b > c$ , entonces  $a > c$

Es una condicional, una de cuyas proposiciones componentes -la de la izquierda- es una conjunción.

- (9) Un cuerpo está en reposo o en velocidad constante si, y sólo si está en equilibrio.

Es una bicondicional, una de cuyas proposiciones componentes -la primera- es una disyunción.

Puede haber, claro está, proposiciones mucho más complejas.

Por ejemplo:

- (10) Si Pedro estudia o no es el caso que María come, entonces iré al cine o al teatro si, y sólo si me dan dinero y no es el caso que me lo prohíben.

Se trata de una condicional una de cuyas proposiciones -la de la izquierda- es una disyunción que tiene una proposición -la segunda- negada. La proposición de la derecha de la condicional es una bicondicional una de cuyas proposiciones que la componen, la de la izquierda, es una disyunción. La de la derecha es una conjunción que tiene una proposición -la de la derecha- negada.

Quizá pueda verse esto más claro empleando paréntesis para indicar el alcance de los términos lógicos.

Si  $\{((\text{Pedro estudia}) \text{ o } [\text{no es el caso que } (\text{María come})])\}$ , entonces  $\{[(\text{iré al cine}) \text{ o } (\text{al teatro})]$  si, y sólo si  $\{(me \text{ dan dinero}) \text{ y } [\text{no es el caso que } (me \text{ lo prohíben})]\}\}$ .

Son proposiciones de este tipo las que decimos y entendemos desde la infancia.

Ahora bien, comoquiera que la lógica proposicional se interesa en las relaciones entre proposiciones y no en la proposición misma considerada en su significado fáctico, podemos prescindir de lo fáctico en las proposiciones compuestas dejando sólo su esqueleto formal, lógico:

No es el caso que...

... o ...

... y ...

Si..., entonces...

... si, y sólo si...

Donde los espacios punteados son lugares en los que cabe cualquier proposición.

La lógica moderna ha recurrido al expediente de representar estas proposiciones cuyo lugar son los espacios punteados, por unos símbolos determinados, y que son las letras latinas minúsculas a partir de la p (primera letra de la palabra "proposición"). De modo que los cinco esquemas vacíos de arriba podemos representarlos así:

No es el caso que p

p o q

p y q

Si p, entonces q

p si, y sólo si q

Donde "p", "q", etc..., son proposiciones. Dicho de otro modo, "p"

"q", etc..., son variables que admiten como valores proposiciones. Y esto porque definimos el concepto de variable así:

VARIABLE ES UN SIMBOLO QUE REPRESENTA O SUSTITUYE UN MIEMBRO CUALQUIERA DE UN CONJUNTO DE COSAS PREVIAMENTE ESTABLECIDO.

A este conjunto llamamos dominio de la variable, y a cualquier miembro de él, valor de la variable.

Los valores de las variables "p", "q", etc..., son, así, proposiciones. Pero dentro del dominio de la variable (el conjunto formado por todas las proposiciones), hay dos clases (dos subclases o subconjuntos) de proposiciones: la formada por las proposiciones verdaderas y la formada por las proposiciones falsas.

Es decir, que las variables que acabamos de introducir para formalizar y simplificar el lenguaje tienen como valores cualquier proposición. (Llamémosle, a cada uno de estos valores valor significativo). Pero también la verdad o falsedad de esa proposición. (A este valor llamémosle valor veritativo).

Con este artificio convencional, podemos representar cualquier proposición compuesta de modo que esté de manifiesto lo único que a la lógica le interesa: las relaciones.

A continuación simplificamos con el uso de las variables las proposiciones numeradas que se han puesto de ejemplo:

- (1)  $p \vee q$
- (2)  $p \wedge q$
- (3) Si p, entonces q
- (4) p si, y sólo si q
- (5) No es el caso que (p y q)
- (6) (p y no es el caso que q) o r
- (7)  $p \wedge (q \vee r)$
- (8) Si (p y q), entonces r
- (9) (p o q) si, y sólo si r
- (10) Si (p o no es el caso que q), entonces [(r o s) si, y sólo si (t y no es el caso que u)]

LOS OPERADORES LOGICOS  
PROPOSICIONALES . - \* \*

Dadas unas proposiciones (p, q, etc...), podemos hacer otras relacionándolas entre sí. A la operación mental mediante la cual transformamos una o dos proposiciones para hacer otra, la llamamos operación lógica proposicional, y al signo que la expresa operador lógico proposicional. Los operadores lógicos proposicionales pueden ser binarios o monarios, dependiendo esto de si opera sobre dos proposiciones o solamente una. La expresión que expresa una operación expresa igualmente el resultado de esa operación. Por ejemplo, en matemática "5 x 3" expresa una operación (de multiplicación), pero también su resultado (15). De igual modo "p . q" expresará una operación (de multiplicación lógica), pero también su resultado.

Podemos dar el significado de un operador de una forma ostensiva mediante lo que se conoce por tablas. Así, por ejemplo, el significado del operador matemático "x" lo da la siguiente tabla (de multiplicación):

a	b	a x b
1	1	1
1	2	2
1	3	3
.....		
2	1	2
2	2	4
2	3	6
.....		
.....		
8	1	8
8	2	16
8	3	24
.....		
.....		
.....		

En las dos primeras columnas se ponen todos los diferentes arreglos (con repetición) posibles de valores (números) de las variables numéricas "a" y "b", y en la tercera columna el resultado de ese caso. Esta tabla, evidentemente, no está terminada, ni podría estarlo, porque los valores posibles de "a" y "b" son infinitos. En lógica la cosa es mucho más fácil y sencilla, porque los valores que a la lógica le interesan (los valores veritativos) son únicamente dos (para una lógica bivalente como la que estudiamos): verdad (V) y falso (F).

El álgebra combinatoria nos dice que los arreglos (con repetición) de  $m$  elementos tomados de  $n$  en  $n$ , son  $m^n$ . Es decir que  ${}^n(\text{AR})_m = m^n$ . Luego, todos los arreglos (con repetición) posibles de los valores (dos: V y F) de dos variables son  $2^2 = 4$ . A saber:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Luego, si tenemos en cuenta que el significado del operador será

el arreglo (con repetición) de los dos valores veritativos en los cuatro casos posible, resulta evidente que el número de operadores binarios posibles, de acuerdo con la fórmula algebraica de arriba, será  $2^4 = 16$ . A saber, los que dan los siguientes resultados:

p	q	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V

  

X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
F	F	F	F	F	F	F
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F

De estos 16 operadores posibles hay algunos muy interesantes (II, V, VII, VIII) porque coinciden más o menos con los términos lógicos tratados anteriormente.

De acuerdo con la misma fórmula de arriba, hay cuatro posibles operadores monarios. A saber:

p	1	2	3	4
V	V	V	F	F
F	V	F	V	F

De ellos, únicamente el 3 es interesante.

Convenimos en representar las operaciones que dan los resultados 3, II, VIII, V, VII, con los siguientes operadores respectivamente: " $\sim$ ", " $\vee$ ", " $\cdot$ ", " $\supset$ ", " $\equiv$ ". De modo que el significado de estos operadores está puesto de manifiesto ostensivamente en las siguientes tablas:

I		II			III		
$p$	$\sim p$	$p$	$q$	$p \vee q$	$p$	$q$	$p \cdot q$
V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	F	F
		F	V	V	F	V	F
		F	F	F	F	F	F

  

IV			V		
$p$	$q$	$p \supset q$	$p$	$q$	$p \equiv q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V

Ahora vamos a ver estos operadores por separar

### La Negación.-

La tabla I:

$p$	$\sim p$
V	F
F	V

Nos dice que si una proposición cualquiera ( $p$ ) es verdad, la proposición  $\sim p$  es falsa, y que si es falsa, la proposición  $\sim p$  es verdad.

Por otra parte, conectando con el capítulo anterior, tenemos que la negación: "No es el caso que  $p$ " se comporta de igual forma. En efecto, si una proposición cualquiera es verdad, la proposición que resulta cuando a la anterior se le agrega "No es el caso que..." es falsa. E inversamente, si la primera es falsa, la segunda es verdad.

En vista de esto, llamamos al signo operador " $\sim$ " signo de la negación y al esquema o función afectado por ese signo (por ejemplo " $\sim p$ ") una negación.

El esquema o función  $\sim p$  podemos interpretarlo (traducirlo al español), de cualquiera de las siguientes maneras:

No es el caso que p  
 No es verdad que p  
 No es cierto que p  
 Es falso que p  
 Es mentira que p  
 No-p

Ya que todas estas interpretaciones (traducciones) se comportan lógicamente igual que la operación que comentamos. La diferencia, si alguna, es puramente retórica y por tanto despreciable para la lógica. Nosotros vamos a preferir la primera y la última, por ser más puras lógicamente, pero usaremos las otras cuando el caso así lo aconseje para no desembocar en un español demasiado duro.

Podemos resumir el significado de la negación de la siguiente manera:

LA NEGACION DE UNA PROPOSICION VERDADERA ES FALSA.  
 LA NEGACION DE UNA PROPOSICION FALSA ES VERDADERA.

Llamamos a la negación también función de contradictoriedad. Función, porque su valor depende del que se le asigna a sus variables, y de contradictoriedad porque su valor, en cada caso, es el contradictorio del que niega.

Para terminar con ella, es importante recordar que el signo " $\sim$ " es un operador proposicional. Niega a una proposición, que no a una palabra, concepto o conjunto. Si "p" es "Pedro estudia", interpretamos (traducimos) " $\sim p$ " como "No es el caso que Pedro estudia", y no como "Pedro no estudia", porque en este segundo caso se está negando el predicado, que es una palabra, concepto o conjunto. Aunque el resultado sea el mismo lógicamente (y en este

caso lo es) no tenemos derecho, en la lógica proposicional, de meternos dentro de la proposición, es decir, de considerarla primaria. A pesar de ello, sin embargo, tal y como ya lo advertimos anteriormente, nosotros lo haremos en aras de la claridad cuando el caso así lo aconseje y sea legítimo.

### La Disyunción.-

Considérese ahora la tabla II:

p	q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ella nos dice que dos proposiciones conectadas por el operador "v" hacen una proposición que es verdad siempre, salvo cuando las dos proposiciones son falsas.

Tenemos, justamente, una expresión en español que se comporta de un modo bastante parecido a esto. Es el término lógico "o" con el que hacemos disyunciones.

En efecto, la proposición:

Pedro estudia o María come.

Es verdad cuando Pedro estudia y María come, (cuando es verdad que Pedro estudia y es verdad que María come). Verdad igualmente cuando Pedro estudia pero María no come, (cuando es verdad que Pedro estudia pero falso que María come). Y es también verdad cuando Pedro no estudia y María come, (cuando es falso que Pedro estudia pero verdad que María come). La proposición citada es falsa únicamente cuando Pedro no estudia ni María come, (cuando es falso que Pedro estudia y es

falso también que María come).

Es bien posible que nos extrañe eso de que la proposición "Pedro estudia o María come" sea verdad cuando es verdad que Pedro estudia y verdad que María come, (el primer caso que la tabla registra), porque en español la expresión "o" implica algunas veces una mútua exclusividad de sus términos. Por ejemplo, en la siguiente (Tarski):

Un niño molesta a su padre para que le compre un juguete y le lleve a la playa. Y le dice el padre: "Te compro el juguete o te llevo a la playa". En este caso, si el padre le compra el juguete y además le lleva a la playa, ha mentido, es decir, ha expresado una falsedad, y no una verdad como lo dice la tabla, porque la disyuntiva que le expresó al niño implicaba una mútua exclusividad, una encrucijada: el juguete por un lado y la playa por el otro, pero no las dos cosas. Es decir, que si le compraba el juguete no le llevaba a la playa y que si le llevaba a la playa, no le compraba el juguete.

En resumen, el signo "v" no se comporta exactamente como el "o" español, pues en algunos casos este último tiene un carácter de mútua exclusividad que "v" no tiene. El "v" dice, según lo pone de manifiesto su tabla de valores veritativos, que la una cosa y no la otra, o la otra cosa y no la una, o ambas cosas a la vez. Es decir, que dice más (en rigor, menos) que el "o" con carácter exclusivo pues lo incluye dentro de su significado, ya que todas las veces que el "o" con carácter exclusivo es verdad, también lo es "v".

En otros casos, sin embargo, el "o" español no tiene ese ca-

rácter de mútua exclusión o encrucijada. Por ejemplo:

Anuncia el Ministerio de Relaciones Exteriores que considera panameños a los nacidos en Panamá o los casados con los nacidos en Panamá. Esto significa que es panameño quien ha nacido en Panamá pero está casado con extranjero, que también es panameño quien está casado con un nacido en Panamá, aunque él haya nacido en otra parte, pero que también es panameño quien ha nacido en Panamá y encima se ha casado con alguien nacido en Panamá, (la inmensa mayoría, por cierto). Es decir, que en este caso el "o" no implica la exclusión mútua de sus términos. Es este "o" que no tiene carácter de encrucijada el que se comporta como "v".

Para evitar confusiones, vamos a emplear en español la expresión "o" para expresar la disyunción que no tiene carácter exclusivo, y la expresión "o... o..." para la que sí la tiene. De acuerdo con esto, el último ejemplo se diría:

Son panameños los nacidos en Panamá o casados con los nacidos en Panamá.

(Que es una abreviatura para "Son panameños los nacidos en Panamá o son panameños los casados con los nacidos en Panamá"). Y el primero, en cambio:

O te compro el juguete o te llevo a la playa.

Generalmente es el contenido fáctico de las palabras lo que nos advierte si la disyunción es exclusiva o inclusiva. Por ejemplo, cuando digo "Sanó o ha muerto" es evidente que se trata de una disyunción exclusiva, porque el contenido fáctico de las proposiciones "El sanó" y "El ha muerto" se repelen entre sí, se excluyen mútuamente, no pueden ser ambas verdaderas. Porque la ma-

teria, el contenido fáctico, el significado de las proposiciones nos declara el tipo de disyunción que las une, el lenguaje corriente se ha dispensado de la molestia de usar dos expresiones diferentes, una para cada tipo de disyunción. Ahora bien, comoquiera que la lógica (formal) no relaciona los contenidos fácticos, los valores significativos de las proposiciones (incluso recurre al expediente de representar las proposiciones con variables que no nos dicen nada de su contenido fáctico), no nos queda más remedio que declarar explícitamente qué disyunción queremos expresar. Por otra parte, es recomendable, para ganar rigor, hacer esta explícita declaración incluso en el lenguaje español, ("o" y "o... o..."). De acuerdo con esto, la proposición recientemente citada ganaría rigor si la expresáramos: "O sanó o ha muerto".

En latín hay dos expresiones para "o", a saber "aut" y "vel". Se empleaba "aut" para las disyunciones con carácter exclusivo ("o... o..."), y "vel" para las disyunciones con carácter inclusivo, es decir, para las que admitían fuesen verdad los dos términos de la disyunción a la vez ("o"). De "vel" viene, por cierto, el empleo del signo "v". (Más adelante veremos el signo operador de la disyunción exclusiva).

Hecha la aclaración anterior, podemos llamar a "v" el signo operador de la disyunción (se entenderá que de la disyunción inclusiva, a menos que se declare explícitamente otra cosa), y al esquema o función "p v q" una disyunción o función disyuntiva (que leemos "p o q").

Resumimos el contenido de la tabla (que también llamamos ma-

triz) de la disyunción, así:

UNA DISYUNCION ES FALSA UNICAMENTE CUANDO SUS DOS  
TERMINOS SON FALSOS.

Si convenimos en llamar disyunto a cada término de una disyunción, podemos expresar lo anterior de cualquiera de las siguientes formas:

ES NECESARIO QUE AMBOS DISYUNTOS SEAN FALSOS PARA  
QUE LA DISYUNCION SEA FALSA.  
ES SUFICIENTE QUE ALGUN DISYUNTO SEA VERDAD PARA  
QUE LA DISYUNCION SEA VERDAD.

A la disyunción también se la llama suma lógica por ciertas analogías, que posteriormente se pondrán de manifiesto, con la suma algebraica. Boole, por cierto, la representó con el signo de esta última (" $+$ "), dándole sin embargo el carácter exclusivo que le quitaría después Jevons y Schröder.

Para terminar, hemos de advertir que hay por lo menos una manera más de poder expresar en español la disyunción o suma lógica. Cuando digo, por ejemplo:

Pedro se ha ido al cine a menos que le haya visitado Juan.

He dicho la verdad si es verdad que Pedro se ha ido al cine y falso que lo haya visitado Juan. He dicho la verdad igualmente si es falso que Pedro se ha ido al cine pero verdad que lo ha visitado Juan. Y he dicho la verdad también si es verdad que Pedro se ha ido al cine y es verdad que lo ha visitado Juan, (pudieron haberse ido al cine juntos, después de haberlo visitado Juan). He mentado, he dicho una falsedad, únicamente si es falso que Pedro se ha ido al cine y falso que Juan lo ha visitado. Es,

pues, evidente que la expresión "a menos que" se rige por las mismas condiciones que la disyunción o suma lógica y podrá, por tanto, traducirla.

Es decir, que estas cuatro proposiciones:

Pedro estudia o María come.  
 Te compro el juguete o te llevo a la playa.  
 Son panameños los nacidos en Panamá o los casados con nacidos en Panamá.  
 Pedro se ha ido al cine a menos que lo haya visitado Juan.

Pueden traducirse (al simbolismo lógico) todas ellas de la misma manera, a saber:

$p \vee q$

### La Conjunción.-

La tabla III:

p	q	p • q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Nos dice que dos proposiciones conectadas por el signo operador "." hacen una proposición que es verdad únicamente cuando sus dos términos o proposiciones que la componen son verdad.

(Al igual que llamamos a los términos de la disyunción disyuntos, podríamos llamarle conjuntos a los de la conjunción, pero esto introduciría un equívoco muy incómodo porque el término conjunto como clase o colección de cosas juega un papel muy importante en la lógica. Se podría obviar este equívoco llamándoles conjunctos a los términos de la conjunción, pero esta pala-

bra es de difícil pronunciación. Por todo lo cual es preferible llamarles, entonces, términos de conjunción o factores lógicos).

Con respecto a la interpretación en español no nos encontramos con ninguna dificultad, porque contamos con una expresión que se comporta exactamente como el signo ".", es decir, una expresión que es verdad únicamente cuando son verdaderas las dos proposiciones de las que está compuesta. Es la expresión "y" con la que hacemos las proposiciones llamadas conjuntivas o conjunciones. Por esta razón, vamos a llamar a "." el signo operador de la conjunción, y al esquema o función "p . q" una conjunción o función conjuntiva.

En efecto, toda proposición con la forma de:

Pedro estudia y el agua hierve.

Es falsa cuando cualquiera de sus términos es falso. En el caso particular del ejemplo, es falsa cuando Pedro estudia pero el agua no hierve, (cuando es verdad que Pedro estudia pero falso que el agua hierve). Es falsa también cuando Pedro no estudia y el agua hierve, (cuando es falso que Pedro estudia pero verdad que el agua hierve). Y falsa igualmente cuando Pedro no estudia y el agua no hierve, (cuando es falso que Pedro estudia y falso que el agua hierve). Es verdad únicamente cuando es verdad que Pedro estudia y es verdad que el agua hierve; es decir, cuando Pedro estudia y el agua hierve.

No hay, pues, problema de traducción o de interpretación. La conjunción española se comporta exactamente como la conjunción lógica, que llamamos también producto lógico por ciertas analogías

que tiene con el producto algebraico y que veremos posteriormente. (Casi todos los autores, comenzando con el mismo Boole, la representan con un punto o con un espacio en blanco entre dos variables o funciones relativamente próximas, es decir, exactamente como se representa el producto algebraico).

Resumimos el contenido de la tabla o matriz de la conjunción de la siguiente manera:

UNA CONJUNCION ES VERDADERA UNICAMENTE CUANDO SUS DOS TERMINOS SON VERDADEROS.

Lo anterior podemos expresarlo también en cualquiera de las siguientes formas:

ES NECESARIO QUE AMBOS TERMINOS DE LA CONJUNCION SEAN VERDAD PARA QUE LA CONJUNCION SEA VERDAD.  
ES SUFICIENTE QUE ALGUN TERMINO DE LA CONJUNCION SEA FALSO PARA QUE LA CONJUNCION SEA FALSA.

Para terminar, hemos de advertir que hay otras maneras de expresar en español la conjunción lógica. Expresiones como:

Pedro estudia aunque María viaja.  
Pedro estudia pero María viaja.  
Pedro estudia a pesar de que María viaja.  
Pedro estudia bien a pesar de que María viaja.  
Pedro estudia, sin embargo María viaja.  
Pedro estudia, y sin embargo María viaja.  
Pedro estudia, María viaja.  
Pedro estudia. María viaja.  
Pedro estudia y María viaja.

Se representan simbólicamente de la misma manera, ya que su diferencia es puramente retórica. Es decir, que todas ellas las representamos así:

$p \cdot q$

Donde "p" es "Pedro estudia" y "q", "María viaja".

Si esto nos extraña es sólo porque los seis primeros ejemplos expresan una oposición retórica entre el contenido material de las dos proposiciones componentes que no aparece sin embargo en los tres últimos ejemplos. Esta oposición no le interesa en absoluto a la lógica formal que, por lo demás, pretende un lenguaje en el que no tiene cabida ninguna oposición de tipo retórico y sentimental. La lógica nos ofrece un lenguaje cerrado a nuestra afectividad con el propósito de ganar claridad y de evitar que se introduzcan en la ciencia los prejuicios y sentimientos nuestros.

La oposición manifiesta en los ejemplos es retórica porque sugiere que debería ser verdad que si María viaja entonces Pedro no estudia; pero a pesar de eso, a despecho de ese deber sugerido, la proposición dice que Pedro estudia y María viaja.

Considérese este otro ejemplo en el que la oposición es más obvia:

Pedro fue al teatro a pesar de que se le había prohibido.

Lo que la proposición dice es que Pedro fue al teatro y que se le había prohibido. Lo que quiere decir, lo que da que decir, lo que sugiere, lo que medio dice, es que si se le había prohibido, no debía haber ido. La proposición nos quiere decir que Pedro no tiene calidad moral. Pero esto es sólo una sugerencia, ya que si se lo quiere decir se lo puede decir abierta y explícitamente.

Conviene recordar, por otra parte, que la relación que la lógica establece es sobre los valores veritativos y no sobre los significativos.

Lo que hemos dicho más arriba es igualmente aplicable a propo-

siciones como:

Te amo bien a pesar de que me desprecies.  
Te odio, pero he de ser justo.  
Etc...

### La Condicional.-

La tabla IV nos dice que:

p	q	$p \supset q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Es decir, que la proposición que resulta de unir dos proposiciones con el signo operador " $\supset$ " es siempre verdad, salvo cuando es verdad la proposición que está a la izquierda (que llamamos antecedente) del signo y falsa la que está a la derecha, (que llamamos consecuente).

También en este caso -precisamente por eso ha sido escogida- nos encontramos con una expresión en nuestra lengua que se comporta más o menos como el signo en cuestión y que vamos a llamar signo operador de la condicional. (Al esquema o función " $p \supset q$ " le llamaremos una condicional o función condicional). Es la expresión "Si..., entonces...".

Por ejemplos:

Si multiplicamos dos números negativos, entonces el resultado es un número positivo.

En efecto, si es verdad que multiplicamos dos números negativos, y verdad también que obtenemos un número positivo, la proposición del ejemplo es verdad. Si es verdad que multiplicamos dos números

negativos, y es falso que obtenemos un número positivo, la proposición sería falsa. Si es falso que multiplicamos dos números negativos pero verdad que obtenemos un número positivo, la proposición es verdad, (pudimos haber multiplicado dos números positivos). Por último, si es falso que multiplicamos dos números negativos y falso también que obtenemos un número positivo, la proposición es verdad, (pudimos haber multiplicado un positivo por un negativo, obteniendo, claro, un negativo).

Hemos de comentar ligeramente hasta dos de los tres casos posibles en que una condicional lógica es verdad para distinguirla con rigor de la condicional española. Resultan, en efecto, un poco extraños el tercero y el cuarto caso. Es decir, que se consideren verdaderas una condicional con el antecedente falso y el consecuente verdadero y una condicional con el antecedente y el consecuente falsos.

Sean de ejemplo estas dos proposiciones que ilustran respectivamente el punto anterior:

Si dos más dos son cinco, entonces tres más tres son seis.  
Si dos más dos son cinco, entonces tres más tres son veinte.

Estas dos proposiciones son verdaderas según la tabla, y como tal hemos de aceptarlas aunque nos extrañe. Tal extrañamiento tiene su origen en la propensión natural que tenemos de pensar que el lenguaje lógico está calcado sobre el español, lo cual es falso.

La verdad de la condicional lógica con antecedente falso y consecuente verdadero choca un poco porque muchas veces (la mayoría) la

condicional española expresa una relación causal. Se piensa que el antecedente es la causa y el consecuente el efecto. Así, por ejemplo, cuando decimos: "Si pongo el agua al fuego, hierve", queremos decir que el poner el agua al fuego es causa de que hierva. Y pensando esto, claro está que es absurdo pensar que dos más dos igual cinco pueda ser causa de que tres más tres sea igual a seis. Pero la condicional lógica dice únicamente que si es verdad, entonces si es verdad el antecedente, el consecuente es verdad. Lo mismo, por tanto, en la proposición "Si pongo el agua al fuego, hierve". No se dice, lógicamente, que el poner el agua al fuego sea causa de que hierva. Se dice únicamente que si es verdad que la pongo al fuego, es verdad que hierve. Se trata, pues, de una relación lógica, no de una relación metafísica como es la de la causalidad. En todo caso, si se quiere ver causalidad en la condicional lógica, habría que entenderla de la siguiente manera: Saber que es verdad que pongo el agua al fuego, es causa de saber que hierve. Nada más ni otra cosa.

Por lo demás, sería igualmente chocante, después de todo, considerar falsas algunas condicionales que tienen falso el antecedente y verdadero el consecuente. Por ejemplo: "Si llueve, se mojan las calles". Es evidente que si no llueve, pero se mojan las calles, la proposición no es falsa, ya que no ha dicho que tiene que llover para que se mojen las calles. Podrían mojarse de otra manera. Los bomberos podrían mojarla, por ejemplo. Es decir, que chocaría considerarla falsa. La condicional lógica es menos rica, por supuesto, que la proposición que expresa una relación causal, pero más gene-

ral, abarca más.

La verdad de la condicional que tiene tanto el antecedente como el consecuente falso es también chocante en algunos casos.

Por ejemplo, el ya citado de:

Si dos más dos son cinco, entonces tres más tres son veinte.

O también:

Si Panamá es un mango, Costa Rica es un melón.

Sin embargo, bien mirado, resultaría así mismo chocante considerar este tipo de condicionales falsas, pues hay también casos como, por ejemplo:

Si María estudia, Pedro va al cine.

Donde se dice la verdad aunque el antecedente y el consecuente sean falsos. En efecto, si María no estudia ni Pedro va al cine, el que dice "Si María estudia, Pedro va al cine" no ha mentido. Pero si no ha mentido es que ha dicho la verdad.

Podemos resumir el significado de la condicional lógica de la siguiente manera:

UNA CONDICIONAL ES SIEMPRE VERDADERA, SALVO CUANDO EL ANTECEDENTE ES VERDAD Y EL CONSECUENTE FALSO.

O también:

UNA CONDICIONAL ES VERDAD SIEMPRE QUE EL ANTECEDENTE SEA FALSO O EL CONSECUENTE VERDAD.

Si meditamos en lo anterior o miramos atentamente la tabla de la condicional en los casos en que es verdad, caeremos en la cuenta de que el antecedente es condición suficiente para el consecuente, pues todas las veces (el primer caso sólo) en que es

verdad el antecedente lo es también el consecuente. Pero no es condición necesaria, ya que el consecuente puede ser verdad sin que lo sea el antecedente (tercer caso). Por otra parte, el consecuente es condición necesaria del antecedente, ya que todas las veces (el primer caso sólo) en que el antecedente es verdad, lo es también el consecuente, pero no es condición suficiente, ya que el consecuente puede ser verdad sin que lo sea el antecedente (tercer caso). Es decir: El antecedente es suficiente, pero no necesario, para el consecuente, y el consecuente necesario, pero no suficiente, para el antecedente. Un ejemplo aclarará esto. Sea la condicional:

Si llueve, se mojan las calles.

Basta (es suficiente) saber que es verdad que llueve para saber que es verdad que las calles se mojan. (El antecedente es condición suficiente para el consecuente). Pero no es necesario que sea verdad que llueve para que sea verdad que las calles se mojan. Podrían haberla mojado los bomberos. (El antecedente no es condición necesaria para el consecuente). Pero, por lo mismo, no podría ser verdad que llueve si no es verdad también que se mojan las calles. (El consecuente es condición necesaria para el antecedente). No basta (no es suficiente) empero, saber que es verdad que llueve. Podrían haberlas mojado los bomberos. (El consecuente no es condición suficiente para el antecedente).

También para la condicional tenemos diferentes expresiones en español que se comportan lógicamente como ella y que pueden por tanto traducirla:

Si p, entonces q  
 Si p, q  
 q si p  
 p sólo si q  
 Basta que p para que q  
 Tiene que q para que p  
 p, luego q  
 p, de donde q  
 p, por tanto q  
 q porque p  
 q todas las veces que p  
 Etc...

Algunas veces " $p \supset q$ " se lee "p implica q", o "q es implicado por p". Sin embargo, nosotros vamos a seguir a esos lógicos que distinguen la implicación de la condicional haciendo de la implicación un caso especial de la condicional. Vamos a llamar implicación a la condicional cuando es verdad en todos los casos, independientemente del valor veritativo del antecedente y el consecuente.

Por ejemplo, la condicional:

Si Pedro estudia, entonces Pedro estudia.

Que representamos " $p \supset p$ ". En efecto, hay dos casos posibles nada más: que p sea verdad y que no lo sea. Si lo es, el antecedente y el consecuente es verdad, luego la condicional es verdad. Si no lo es, el antecedente y el consecuente son falsos, luego la condicional es verdad. Luego es verdad en todos los casos posibles. Luego es una implicación, que podemos leer: "p implica p". Al antecedente de la implicación le llamamos implicante, y al consecuente implicado.

La Bicondicional.-

El significado de la bicondicional aparece completamente de manifiesto en la tabla V:

p	q	$p \equiv q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Podemos resumir este significado así:

UNA BICONDICIONAL ES VERDAD CUANDO SUS DOS TERMINOS SON VERDAD Y CUANDO SUS DOS TERMINOS SON FALSOS.

O, también:

UNA BICONDICIONAL ES VERDAD SI, Y SOLO SI SUS DOS TERMINOS TIENEN EL MISMO VALOR VERITATIVO.

De lo anterior se infiere que, en una bicondicional verdadera

- 1) basta saber (es condición suficiente) que el primer término es verdad para saber que el segundo también lo es, pues no hay ningún caso en que, siendo el primero verdadero, no lo sea también el segundo,
- 2) es necesario saber (es condición necesaria) que el primer término es verdad para saber que también lo es el segundo, pues no hay ningún caso en que, siendo el segundo verdad, no lo sea también el primero,
- 3) basta saber (es condición suficiente) que el segundo término es verdad para que también lo sea el primero, pues no hay ningún caso en que, siendo verdad el segundo, no lo sea también el prime-

ro,

- 4) es necesario saber (es condición necesaria) que el segundo término es verdad para saber que el primero también lo es, pues no hay ningún caso en que, siendo el primero verdad, no lo sea también el segundo.

O sea que la bicondicional " $p \equiv q$ " dice que p es condición suficiente y necesaria para q, y q condición suficiente y necesaria para p.

Si, como establecimos anteriormente, " $p \supset q$ " dice que

p es suficiente para q

q es necesaria para p

y " $q \supset p$ " dice que

q es suficiente para p

p es necesaria para q

entonces " $(p \supset q) \text{ y } (q \supset p)$ " dice que p es suficiente y necesario para q y q es suficiente y necesario para p. Es decir que " $(p \supset q) \text{ y } (q \supset p)$ ", que podemos expresar así:

$$(p \supset q) \cdot (q \supset p)$$

Dice exactamente lo mismo que " $p \equiv q$ ". Hasta tal punto que este segundo esquema puede ser considerado como una mera abreviatura del primero. (En efecto, así se le considerará cuando presentemos más adelante a la lógica como un sistema exacto).

En resumen, una bicondicional es una condicional doble, de ida y vuelta.

Si la condición suficiente la expresamos en español, según

vimos: "Si  $p$ , entonces  $q$ ", la suficiente y necesaria la expresaremos: "Si  $p$ , entonces, y sólo entonces  $q$ ". O, también: " $q$  si, y sólo si  $p$ ", que, por lo visto, sabemos es lo mismo que: "Si  $q$ , entonces, y sólo entonces  $p$ ", y que: " $p$  si, y sólo si  $q$ ". Vamos a reservarnos esta última expresión para traducir " $p \equiv q$ ", aunque la más propia sería "Si  $p$ , entonces, y sólo entonces  $q$ ", pues la otra supone una inversión. Pero como es una inversión legítima, es la que emplearemos por lo general. Y esto únicamente para no violentar la tradición del lenguaje, sobre todo del lenguaje matemático, que expresa la condición suficiente y necesaria con la expresión "Si, y sólo si".

Otra de las traducciones posibles, además de las que acabamos de comentar, es: "Siempre que  $q$ , y únicamente cuando  $q$ ,  $p$ " Etc...

También en la bicondicional hay un caso en el que choca un poco considerarla como verdad, tal y como lo exige su tabla. Es el cuarto caso, cuando sus dos términos son falsos.

En efecto, es un poco raro considerar verdaderas bicondicionales como éstas:

Si Panamá es un mango, entonces, y sólo entonces  
Costa Rica es un melón.  
Dos más dos son mil si, y sólo si tres más tres  
son dos.

Y sin embargo, si no lo hacemos, tendríamos que considerar igualmente falsas bicondicionales como ésta:

Pedro estudia si, y sólo si María come.

Cuando ni Pedro estudia ni María come. Quien dice: "Pedro estudia

si, y sólo si María come", no miente cuando es falso que Pedro estudia y falso que María come. Pero si no miente es que ha dicho la verdad.

Por último, así como antes establecimos llamar implicación a una condicional verdadera en todos los casos posibles, convenimos ahora en llamar equivalencia a una bicondicional que goza de esa misma propiedad. Entonces, leemos " $p \equiv q$ " así: "p equivalente q".

Por ejemplo, la bicondicional:

Pedro come si, y sólo si Pedro come.

Que representamos " $p \equiv p$ ", es una equivalencia, puesto que es una bicondicional verdadera en todos sus casos (solamente dos) posibles.

Comoquiera que podemos considerar la bicondicional (y por tanto también la equivalencia) como una conjunción de dos condicionales, y que la conjunción es verdad únicamente cuando sus dos términos lo son, resulta que podemos decir entonces que la equivalencia es una conjunción de implicaciones donde se alternan el implicante y el implicado.

Otra cosa en la que conviene fijarse es que, así como decimos que dos términos son equivalentes si, y sólo si son verdaderos y falsos en los mismos casos, podemos decir igualmente de dos funciones que son equivalentes si son verdaderas y falsas en los mismos casos, es decir, si, y sólo si tienen la misma tabla.

Por ejemplo, es evidente que la función " $p \vee q$ " tiene la misma tabla que " $q \vee p$ ". Podemos, por tanto, decir que son equivalentes y expresarlo así:

$$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$$

Con la introducción de estos operadores podemos traducir a lenguaje lógico cualquier proposición secundaria. A continuación, y a guisa de ejemplos, traducimos a la notación lógica las proposiciones numeradas que aparecen en el capítulo titulado Formalización del Lenguaje.

- (1)  $p \vee q$
- (2)  $p \cdot q$
- (3)  $p \supset q$
- (4)  $p \equiv q$
- (5)  $\sim(p \cdot q)$
- (6)  $(p \cdot \sim q) \vee r$
- (7)  $p \cdot (q \vee r)$
- (8)  $(p \cdot q) \supset r$
- (9)  $(p \vee q) \equiv r$
- (10)  $(p \vee \sim q) \supset [(r \vee s) \equiv (t \cdot \sim u)]$

## LOS PUNTOS . - \*

Entendemos por alcance de un operador la región que cobija y somete a su significado; es decir, su radio de acción. Así, por ejemplo, en:

$$(a+b) \times c$$

El signo de la multiplicación "x" cobija al de la suma; la suma está dentro del radio de acción del signo de la multiplicación. Es decir, la expresión nos dice que esa suma (la de a más b) ha de ser multiplicada por c. En cambio, en:

$$a+(b \times c)$$

El signo de la adición "+" abarca, alcanza, al de la multiplicación; en esta segunda expresión la multiplicación está dentro del radio de acción del signo de la suma. Es decir, la expresión nos dice que esa multiplicación (la de b por c) ha de ser sumada a a.

Para efectuar las operaciones indicadas en estas expresiones procedemos, primero, con aquellas de menor alcance. La información sobre cuál de los signos tiene mayor alcance (y también, por tanto, sobre cuál tiene menor alcance), nos la dan los paréntesis, y es muy importante. Repárese en que, salvo por la distribución de los paréntesis, las dos expresiones son iguales. La diferencia,

bien grande, les llega por la distribución de los paréntesis. Podemos poner de manifiesto la diferencia si le asignamos valores a las dos funciones y realizamos las operaciones indicadas. Por ejemplo, asignándole a las variables a, b y c los valores 1, 2 y 3, respectivamente, la primera expresión es igual a 9, la segunda, en cambio, a 7.

Este uso de los paréntesis, que podemos llamar uso matemático de los paréntesis para distinguirlo del uso retórico de los paréntesis, es el que hemos venido empleando en el lenguaje lógico que construimos. (El uso retórico de los paréntesis, como el que en este instante estoy haciendo, lo empleamos únicamente en el lenguaje español que venimos usando para hablar en él de el lógico). Así:

$$(p \vee q) \cdot r$$

Es una conjunción, o producto lógico, uno de cuyos términos (factores), el primero, es una disyunción o suma lógica. Y:

$$p \vee (q \cdot r)$$

Es una disyunción, o suma lógica, uno de cuyos términos (disyuntos o sumandos), el segundo, es una conjunción o producto lógico.

Si le asignáramos valores a las variables de estas dos últimas funciones, nos encontraríamos, como nos encontramos con las dos primeras, con dos resultados radicalmente diferentes. Esta diferencia la pondrían de manifiesto sus respectivas tablas.

En expresiones más complejas, matemáticas y lógicas, se u-

utilizan, además de los paréntesis, los paréntesis cuadrados "[", "]", y las llaves "{", "}". Por ejemplo, en lógica:

$$p \vee \{(\sim q \cdot r) \supset [s \cdot (t \equiv u)]\}$$

Ahora bien, comoquiera que en lógica abundan expresiones como ésta, y aún más complejas, los paréntesis se hacen insuficientes y su uso demasiado complicado. Con el fin de facilitar la expresión de tales funciones, se suele emplear la llamada técnica de los puntos, que introdujo Peano.

Para entender esta técnica, partamos de la convención de que todos los signos u operadores hasta ahora tratados tienen el mismo alcance natural, con excepción de la conjunción, que será el signo de menor alcance natural. (También con excepción de la negación, que trataremos después como caso especial). Los signos de mayor alcance natural serán, pues:

$$\vee, \supset, \equiv$$

Convengamos, así mismo, que cuando un signo va acompañado de un punto, (uno a cada lado), el punto le confiere un alcance adicional al natural suyo, de modo que un signo con un punto tendrá mayor alcance que un signo de su mismo alcance natural pero sin punto. Si un signo tiene dos puntos, (dos a cada lado), tendrá mayor alcance que un signo de su mismo alcance natural pero con un punto sólo o sin ninguno, pero menor alcance que uno con más de dos puntos. Etc...

Ahora bien, comoquiera que la conjunción o producto lógico, (el signo que convenimos en ser el de menor alcance natural), se le representa ya con un punto, tendrá, en virtud de

ese punto, mayor alcance que cualquiera de los signos de mayor alcance natural pero sin punto. Sin embargo, la conjunción (con un punto, tal y como estamos habituados a representarla), tendrá menor alcance que cualquiera de los signos de mayor alcance natural al que se le haya reforzado con un punto. Para que una conjunción (con un punto) tenga mayor alcance que un signo de mayor alcance natural reforzado con un punto, la conjunción tendrá que tener dos puntos. Y tres puntos para que supere en alcance a un signo de mayor alcance natural reforzado con dos puntos. Etc... Es decir que, en general, a igual cantidad de puntos, tiene mayor alcance el signo de mayor alcance natural. Si la cantidad de puntos no es igual, tiene mayor alcance el que más puntos tenga.

En la conjunción, los puntos los pondremos el uno encima del otro si son dos, en forma de triángulo si son tres. Etc... En los demás signos, (salvo algunos de los que no hemos hablado todavía y que introduciremos después), pondremos los puntos a ambos lados, en cada uno de los cuales habrá la cantidad de puntos que el signo necesite. Así, por ejemplo, "." es una conjunción con un punto. ":", es una conjunción con dos puntos. ":", con tres. "::", con cuatro. Etc... ".v.", es una disyunción con un punto. ":v:", una disyunción con dos puntos. ":\>:", es una condicional con tres puntos. "::≡::", una bicondicional con cuatro puntos. Etc...

Por otra parte, para la negación no empleamos puntos. El alcance de la negación lo expresaremos con paréntesis, salvo

el caso que afecte una sola variable, porque entonces el uso de paréntesis es totalmente superfluo. Por ejemplo, en la función:

$$\sim(p \vee q)$$

La negación tiene mayor alcance que en:

$$\sim p \vee q$$

Es totalmente innecesario expresar esta última función con paréntesis:

$$\sim(p) \vee q$$

A continuación ponemos algunos ejemplos para dejar bien en claro la técnica de los puntos. Expresamos las funciones primero con paréntesis y en la línea siguiente con puntos.

$$\begin{aligned} (p \vee q) \supset p \\ p \vee q \cdot \supset \cdot p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p \vee q) \equiv (q \vee p) \\ p \vee q \cdot \equiv \cdot q \vee p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p \vee q) \cdot (p \supset q) \\ p \vee q \cdot p \supset q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (q \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)] \\ q \supset r : \supset : p \vee q \cdot \supset \cdot p \vee r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(p \vee p) \supset p] \equiv \{ [p \equiv (p \vee p)] \supset (p \supset p) \} \\ p \vee p \cdot \supset \cdot p \cdot \equiv : \cdot p \cdot \equiv \cdot p \vee p : \supset : p \supset p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sim \{ \{ [(p \cdot q) \cdot (r \supset s)] \cdot \sim(t \vee u) \} \equiv w \} \\ \sim [p \cdot q : r \supset s \cdot \cdot \sim(t \vee u) \cdot \equiv : \cdot w] \end{aligned}$$

Para expresar oralmente estas funciones hemos de decir los puntos que cada operador lleva. El primero de estos últimos ejemplos se leerá o dictará así:

Si  $p$  o  $q$ , entonces (con un punto)  $p$

El cuarto, así:

Si  $q$ , entonces  $r$ , luego (con dos puntos)  $p$  o  $q$ , luego (con un punto)  $p$  o  $r$

Y el último:

No es el caso que (abre paréntesis cuadrados)  $p$  y (con un punto)  $q$  y (con dos puntos)  $si$   $r$ , entonces  $s$ , y (con tres puntos) no es el caso que (abre paréntesis redondos)  $t$  o  $u$  (cierra paréntesis redondos)  $si$ , y sólo  $si$  (con tres puntos)  $w$  (cierra paréntesis cuadrados).

Quizá se comprenda mejor el caso de la conjunción si nos figuramos que su signo en realidad es el espacio en blanco entre dos variables o funciones relativamente próximas. En efecto, es así, como un espacio en blanco entre dos expresiones próximas, como se la representa algunas veces. Según esto, la función " $p$   $q$ " es una conjunción que leemos " $p$  y  $q$ ". Por otra parte, es lo mismo que se hace en álgebra algunas veces con el signo matemático homónimo del producto lógico; es decir, con el signo de la multiplicación. La expresión " $a$   $b$ " se lee, en álgebra, " $a$  por  $b$ ".

Si nos figuramos, digo, que esto es así, y que sólo por razones de claridad instrumental le hemos estado poniendo un punto a la conjunción, resulta que, sin saberlo, le habíamos estado dando un alcance adicional, que sin embargo no necesitaba. Podemos, pues, tener al espacio en blanco como el signo (de la conjunción) de menor alcance natural, bien que pongamos siempre un punto reforzándolo aun cuando no lo necesite, como en:

$p \cdot q$

(También los matemáticos han querido ahorrar paréntesis estableciendo diversos grados de alcance para los operadores que manejan. El acuerdo, sin embargo, no ha sido universalmente aceptado).

### Ejercicio 1.-

a) Expresar con paréntesis:

- 1)  $p \cdot q \cdot v \cdot r$
- 2)  $p \cdot q \vee r$
- 3)  $p \supset q \cdot q \supset p$
- 4)  $p \cdot q \supset r : s$
- 5)  $p \cdot \sim(q \cdot r) \cdot v \cdot p$
- 6)  $p : \sim(q \cdot r) : v : p$
- 7)  $p \vee q \cdot \cdot p \equiv \cdot q \supset r : v : s \vee t$
- 8)  $p \vee q \cdot \cdot p \equiv q : \supset : r \cdot v \cdot s \vee t \cdot : \supset : \cdot p$
- 9)  $q \supset r : \supset : p \vee q \cdot \cdot p \vee r$

b) Expresar con puntos:

- 1)  $\sim p \supset (\sim p \cdot \sim p)$
- 2)  $\sim(p \vee q) \supset r$
- 3)  $(q \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)]$
- 4)  $\sim[p \supset (p \vee p)] \supset (p \supset p)$
- 5)  $(p \vee p) \supset \{[p \supset (p \vee p)] \supset (p \vee p)\}$
- 6)  $\sim(p \cdot q) \cdot [q \cdot (p \cdot r)]$
- 7)  $(p \cdot p) \equiv [q \vee (r \supset s)]$
- 8)  $(p \cdot p) \vee [q \vee \sim(r \supset s)]$

O T R A S   N O T A C I O N E S   Y   L O S  
O P E R A D O R E S   D E   S H E F F E R . -

La notación que venimos empleando es perfectamente convencional, de modo que no se alteraría nada de lo fundamental que hemos dicho si la canjeáramos por cualquier otra que nos resultase más cómoda. De hecho, circulan diferentes notaciones que conviene conocer para no sentirnos perdidos en los libros que las emplean.

La notación más corriente es la que emplearon Whitehead y Russell, que no necesita ningún comentario puesto que es la que empleamos en este libro.

Otra muy corriente es la que usa Hilbert. Como variables proposicionales, usa las letras mayúsculas: X, Y, Z, etc..., o bien esas mismas letras con índice:  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ , etc...

La negación la representa:

$\bar{X}$

La disyunción, al igual que Whitehead y Russell:

$X \vee Y$

La conjunción:

$X \& Y$

O bien:

$$XY$$

La condicional:

$$X \rightarrow Y$$

Y la bicondicional:

$$X \leftrightarrow Y$$

O, también:

$$X \sim Y$$

El profesor Federicci, bien conocido en Panamá, tiene una notación muy interesante que facilita mucho las operaciones lógicas:

La negación:

$$\bar{p}$$

O bien:

$$p \setminus$$

La conjunción:

$$p \cdot q$$

La disyunción:

$$p \vee q$$

(Porque, según se verá después, " $p \vee q$ " es equivalente a " $\sim(\sim p \cdot \sim q)$ ".)

La condicional:

$$p \supset q$$

(Porque, según se verá después, " $p \supset q$ " es equivalente a " $\sim(p \cdot \sim q)$ ".)

La bicondicional:

$p \circ q$ 

(En vez de puntos, el profesor Federicci emplea comas para indicar el alcance de los operadores).

Algunos autores, los matemáticos especialmente, representan la conjunción:

 $p \wedge q$ 

Y la negación:

 $p'$ 

La notación original de Boole, para la conjunción:

 $x \cdot y$ 

O bien:

 $xy$ 

Para la disyunción (con carácter exclusivo):

 $x \dot{+} y$ 

Para la negación:

 $1-x$ 

La disyunción con carácter inclusivo, tal y como se la interpreta a partir de Jevons, la representa Boole:

 $x \dot{+} y(1-x)$ 

Boole no usa la condicional, que introduce Charles S. Peirce. Lo que posteriormente se llamó bicondicional, empero, lo representó Boole:

 $x = y$ 

Una notación muy interesante es la que emplea la escuela polaca encabezada por Lukasiewicz.

La negación se representa:

$Np$

La disyunción:

$\Delta pq$

La conjunción:

$Kpq$

Y la condicional:

$Cpq$

Para representar funciones más complejas, se conviene en que todo operador ( $\Delta$ ,  $K$ ,  $C$ ) tiene alcance sobre los dos signos (variable u operador) que están a la derecha (nuestra) y sobre el alcance de estos últimos, menos la negación ( $N$ ), que sólo alcanza sobre el signo (variable u operador) inmediatamente a la derecha y sobre el alcance de éste.

Unos ejemplos prácticos aclararán esto. A continuación escribimos algunas funciones e inmediatamente debajo esa misma función con la notación polaca:

$p \supset q \cdot q \supset p$

$KCpqCqp$

$p \vee q \cdot \supset \cdot p$

$CApqp$

$p \cdot \vee \cdot q \supset p$

$ApCqp$

$p \cdot \supset \cdot q \supset p$

$CpCqp$

$p \supset q \cdot \supset \cdot p$

$CCpqp$

$$p \supset q \cdot \supset \cdot r : \supset : s$$

$$CCCpqrs$$

$$\sim p \supset \sim q \cdot \supset \cdot q \supset p$$

$$CCNpNqCqp$$

$$p \supset q \cdot \supset \cdot \sim (q \cdot r) \supset \sim (r \cdot p)$$

$$CCpqCNKqrNrp$$

$$\sim [\sim (p \cdot \sim q) \vee \sim r]$$

$$NANKpNqNr$$

$$p \vee q : p \supset r \cdot q \supset s : \supset : r \vee s$$

$$CKApqKCprCqsArs$$

Lo interesante de esta notación consiste en que en ella aparecen primero los operadores de mayor alcance, de suerte que resulta muy conveniente para darle información a los computadores lógicos disponiéndolos de antemano con respecto a la operación principal. Esta notación, que tiene además la ventaja tipográfica de no necesitar signos raros y de poder prescindir totalmente de puntos y paréntesis, tiene sin embargo una gran desventaja, y es que resulta muy oscura a la intuición.

### Ejercicio 2.-

a) Expresar, con la notación polaca, las siguientes funciones:

- 1)  $\sim (p \cdot \sim p)$
- 2)  $p \supset \sim q \cdot \supset \cdot q \supset \sim p$
- 3)  $p \supset q \cdot p \cdot \supset \cdot q$
- 4)  $\sim (p \vee q) \cdot \equiv \cdot \sim p \cdot \sim q$

b) Expresar, con la notación que venimos empleando en este libro, las siguientes funciones:

- 1)  $A_p N_p$
- 2)  $CKCp q N_q N_p$
- 3)  $CKA p q N_q p$

### Los Operadores de Sheffer.- \*

Si volvemos la vista a la página 24, veremos que de los 16 operadores posibles sólo hemos elegido 5, los que corresponden a XIII o XI ( $\sim p$  o  $\sim q$ ), II ( $p \vee q$ ), VIII ( $p \cdot q$ ), V ( $p \supset q$ ) y VII ( $p \equiv q$ ).

Hay dos operadores más que conviene distinguir porque tienen ambos una propiedad muy notable que posteriormente se pondrá de manifiesto. Son los que dan los resultados IX y XV. Representamos, con Sheffer, el primero: " $/$ ", y el segundo: " $\downarrow$ ".

De acuerdo con lo anterior, la tabla del primer operador es:

p	q	p/q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Comoquiera que la función " $p/q$ " es falsa únicamente cuando sus dos términos son verdad, podemos leerla;:  $p$  incompatible con  $q$ , y al operador " $/$ ": signo de la incompatibilidad.

Es fácil, y conveniente, darse cuenta de que los valores de la incompatibilidad son exactamente opuestos a los de la conjunción en las mismas condiciones, es decir, cuando se les asigna a sus variables los mismos valores. Esto significa que la in-

compatibilidad es equivalente a la negación de la conjunción, y viceversa, la conjunción, equivalente a la negación de la incompatibilidad.

La tabla del segundo operador de Sheffer es:

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Comoquiera que la función " $p \downarrow q$ " es verdadera únicamente cuando sus dos términos son falsos, podemos leerla: ni p ni q, y al operador " $\downarrow$ ": signo de la negación conjunta.

También aquí es fácil e igualmente conveniente reparar en que la negación conjunta es equivalente a la negación de la disyunción, puesto que los valores de la negación conjunta son los opuestos a los de la disyunción bajo la misma asignación de valores a sus variables.

## LA TRADUCCION . - \* \*

El filósofo inglés, George Berkeley, decía que el lenguaje no se limitaba sólo a comunicar ideas. Más aún, que la comunicación de ideas no era, ni siquiera, la misión principal del lenguaje. ¿Qué quiere decir esto? Quiere decir que a la hora de pretender traducir nuestro lenguaje al lenguaje lógico, para poder manejarlo con mayor eficacia y esfuerzo menor, nos topamos con toda una serie de cosas que, si bien son importantes, hemos de prescindir de ellas, pues su importancia no le viene de lo que dicen, sino de lo que hablan, de lo que sugieren, de lo que quieren decir.

Por ejemplo, considérese la siguiente proposición:

La madre de María le prohibió a ésta que saliera de casa, a pesar de ello, sin embargo, María se fue al cine.

Esta proposición podemos entenderla, sencillamente, como: "La madre de María le prohibió a ésta que saliera de casa y María se fue al cine". Todo lo demás, lo más importante quizá, lo que más nos habla de María pintándonosla como una persona de negativa moral, desde un punto de vista estrictamente lógico, sobra. Es decir, la proposición citada puede, y debe, ser traducida por "p . q".

El criterio que decide sobre qué traducción hemos de darle a una proposición, es el de los casos en que esa proposición es verdadera y falsa. En el ejemplo citado, basta, evidentemente, que sea falso que la madre de María le haya prohibido a ésta salir de casa, o que sea falso que María haya salido, para que toda la proposición sea falsa. Es, por tanto, un ejemplo claro y manifiesto de conjunción, aunque no aparezca el "y" que usualmente, pero no siempre, se emplea en estos casos.

En el lugar oportuno se comentó ya casos como el anterior, lo mismo que con los otros operadores y términos lógicos, de manera que no es necesario volver a insistir sobre la purga retórica que hay que hacerle al lenguaje en el que hablamos para traducirlo limpiamente al lógico.

Hemos de tener particular cuidado, a la hora de la traducción, con aquellas palabras cuyo significado varía de una proposición a otra o de un contexto a otro. Tales son, por ejemplo, las palabras "yo", "tú", "él", "ahora", "aquí", etc...

Por ejemplo, (de Quine):

Juan fue a Colón y yo le acompañé.  
Juan fue a Chitré y yo no le acompañé.

Es evidente que estas dos proposiciones pueden ser ambas verdaderas, y sin embargo, parecería que su representación simbólica es:

$$p \cdot q : r \cdot q$$

Lo cual es falso en todos los casos, pues contiene " $q \cdot \sim q$ ".

Lo que acontece aquí es que si traduzco "yo le acompañé" por "q", "yo no le acompañé" no puedo traducirlo por " $\sim q$ ". Por-

que en la primera proposición se dice (tácitamente) "yo le acompañé a Juan a Colón", y en la segunda no se dice "yo no le acompañé a Juan a Colón", sino "yo no le acompañé a Juan a Chitré". Para traducir, pues, hemos de entender lo que se dice junto con lo que se expresa sólo tácitamente.

En las proposiciones complejas resulta a veces un tanto difícil la traducción. El método más recomendable es el de distinguir primero el término lógico principal fraccionando así en dos el discurso y hacer otro tanto con los términos que resultan. Por ejemplo:

A menos que las próximas elecciones sean honestas y el pueblo adquiriera conciencia política, nuestro país seguirá hundiéndose en la ignominia.

Sabemos que "a menos que" puede ser traducido por la disyunción, y que, en este caso, es el término de mayor alcance. Un poco más de atención revela, además, que esa disyunción une "Las próximas elecciones son honestas y el pueblo adquiere conciencia política" con "Nuestro país seguirá hundiéndose en la ignominia". Canjeando el "a menos que" por "o" e introduciendo paréntesis, la proposición queda:

(Las próximas elecciones son honestas y el pueblo adquiere conciencia política) o (nuestro país seguirá hundiéndose en la ignominia)

Con el primer término de la disyunción hacemos lo mismo, y queda:

[(Las próximas elecciones son honestas) y (el pueblo adquiere conciencia política)] o (nuestro país seguirá hundiéndose en la ignominia)

Que puede ser tratado como un caso del esquema:

p . q . v . r

Por último, conviene recordar que estamos tratando con proposiciones secundarias, es decir, compuestas, y que todavía no contamos con el instrumental necesario para traducir simbólicamente las primarias. La observación es pertinente porque algunas veces las proposiciones secundarias aparecen como primarias porque se han abreviado en el sujeto o predicado de alguna de las proposiciones de las que están compuestas. Por ejemplo:

Pedro ha ido al cine o al teatro.

Puede ser considerada como una proposición secundaria abreviada. Totalmente explícita, es:

Pedro ha ido al cine o Pedro ha ido al teatro.

En cambio, en otros casos como:

Todos los seres humanos son hombres o mujeres.

No puede ser considerada como una proposición secundaria abreviada de:

Todos los seres humanos son hombres o todos los seres humanos son mujeres.

Prueba elocuente de ello es que la primera es verdad pero la segunda falsa.

### Ejercicio 3.-

a) Sea "p", "María estudia"; y sea "q", "Juan se va al cine". Con esta interpretación, tradúzcase a lenguaje lógico-simbólico:

- 1) Juan va al cine. María estudia.
- 2) Si Juan se va al cine, María estudia.
- 3) Si María estudia, Juan no se va al cine.
- 4) Juan se va al cine y María estudia.
- 5) Juan se va al cine, pero María estudia.
- 6) María estudia, a menos que Juan se vaya al cine.
- 7) Si María estudia, entonces, y sólo entonces, Juan no se va al cine.

- 8) María estudia si Juan se va al cine.
- 9) María estudia, siempre que Juan se vaya al cine.
- 10) Es necesario que María estudie para que Juan se vaya al cine.
- 11) Es suficiente que María estudie para que Juan se vaya al cine.
- 12) Es suficiente y necesario que María estudie para que Juan se vaya al cine.
- 13) Es suficiente y necesario que Juan se vaya al cine para que María no estudie.
- 14) María estudia sólo si Juan se va al cine.
- 15) Juan se va al cine o María no estudia.
- 16) A menos que Juan se vaya al cine, María estudia.
- 17) Juan se va al cine si, y sólo si María estudia.
- 18) Ni María estudia ni se va Juan al cine.
- 19) No es el caso que María estudia y que Juan se va al cine.
- 20) No es el caso que María estudia y Juan se va al cine.
- 21) Es incompatible que María estudie y que Juan se vaya al cine.

b) Tradúzcase, según la interpretación que se indica entre paréntesis:

- 1) Si me gano la lotería (p) o consigo un puesto de diplomático (q), haré un viaje a Europa (r), a menos que me gane la lotería (p) y me roben el dinero (s) o me den el puesto de diplomático (q) pero me lo quiten en Octubre (t)
- 2) Si me eligen diputado (p) y el pueblo me lo pide (q), haré que se termine la carretera a Puerto Armuelles (r) y los edificios del aeropuerto (s), o dejaré de llamarme como me llamo (+)

c) La siguiente es una frase ambigua que puede ser entendida de dos maneras diferentes. Tradúzcasela a lenguaje lógico-simbólico (según la interpretación que se indica) de esas dos maneras de modo que pierda la equívocidad:

- 1) María estudia (p) o Juan se va al cine (q) y María estudia (p)

## L A S   T A B L A S . - \* \*

Llamamos decidir una función al proceso que llevamos a cabo mediante el cual podemos averiguar si una función es verdadera o falsa o cuándo verdadera y cuándo falsa. Hacer la matriz o tabla de una función es un método de decidirla y que se emplea en lógica desde 1920-21 (Lukasiewicz, Post, Wittgenstein). Ya en la obra de Boole, sin embargo, se encuentra larvado, según veremos, este método en su teoría del desarrollo o expansión de funciones.

Para hacer una tabla lo primero que hacemos es tirar una raya encima de la cual ponemos las variables que intervienen en la función. A continuación le asignamos a estas variables todos sus valores posibles (2) en todos los arreglos (con repetición) posibles. A cada arreglo le llamamos caso.

El álgebra combinatoria nos dice que hay  $m^n$  arreglos (con repetición) posibles, donde  $m$  es el número de elementos que se arreglan y  $n$  el número de ellos que se toma en cada arreglo. (Interesa observar que, puesto que se trata de arreglos con repetición,  $n$  puede ser mayor que  $m$ ).

Por otra parte, como los valores (en una lógica bivalente)

son dos, está claro que el número de casos será  $2^n$ , donde  $n$  es el número de variables que aparecen en la función. Funciones con 2 variables dan  $2^2 = 4$  casos; funciones con 3 variables, tablas de  $2^3 = 8$  casos; etc...

Una manera conveniente de disponer todos los casos es poner en la primera columna V en los  $\frac{2^n}{2}$  primeros casos y F en los  $\frac{2^n}{2}$  restantes. En la segunda columna alternamos grupos de  $\frac{2^n}{2}$  de V y F, y así hasta llegar a la columna correspondiente a la última variable en donde V y F se alternan de una en una.

Por ejemplo, una función de dos variables tendrá los siguientes  $2^2$  casos:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Una de tres, sin embargo, los  $2^3$  siguientes:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Etc...

A continuación, y en la misma fila en la que están las variables, ponemos todas las funciones que están en la función cuya tabla hacemos, poniendo primero aquellas de menor alcance y procediendo con la que le sigue en alcance hasta llegar a la función completa.

Debajo de cada una de estas funciones ponemos, en cada caso, el valor que bajo esa asignación de valores le corresponde.

Unos cuantos ejemplos dejarán todo esto muy claro.

$$p \vee q \cdot p \supset q$$

p	q	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \vee q \cdot p \supset q$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

$$\sim(p \supset q) \cdot \equiv \cdot p \cdot \sim q$$

p	q	$\sim q$	$p \supset q$	$\sim(p \supset q)$	$p \cdot \sim q$	---
V	V	F	V	F	F	
V	F	V	F	V	V	
F	V	F	V	F	F	
F	F	V	V	F	F	

$$\sim(p \supset q) \cdot \equiv \cdot p \cdot \sim q$$

V  
V  
V  
V

$$\sim(\sim p \cdot \supset \cdot q \vee \sim p)$$

p	q	$\sim p$	$q \vee \sim p$	$\sim p \cdot \supset \cdot q \vee \sim p$	---
V	V	F	V	V	
V	F	F	F	V	
F	V	V	V	V	
F	F	V	V	V	

$$\sim(\sim p \cdot \supset \cdot q \vee \sim p)$$

F  
F  
F  
F

$$p \cdot q \cdot v \cdot \sim p \cdot \sim r : \supset : q \equiv r$$

p	q	r	$\sim p$	$\sim r$	$p \cdot q$	$\sim p \cdot \sim r$	$q \equiv r$
V	V	V	F	F	V	F	V
V	V	F	F	V	V	F	F
V	F	V	F	F	F	F	F
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	V	V	F	V	V

$p \cdot q \cdot v \cdot \sim p \cdot \sim r$	$p \cdot q \cdot v \cdot \sim p \cdot \sim r : \supset : q \equiv r$
V	V
V	F
F	V
F	V
F	V
F	V
F	V
F	V

$$p \vee q : p \supset r \cdot q \supset s : \supset : r \vee s$$

p	q	r	s	$p \vee q$	$p \supset r$	$q \supset s$	$r \vee s$	$p \supset r \cdot q \supset s$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	F	V	F
V	V	F	V	V	F	V	V	F
V	V	F	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	V	V	F	V

$p \vee q : p \supset r . q \supset s$	$p \vee q : p \supset r . q \supset s$
V	
F	
F	
F	
V	
V	
F	
F	
V	
F	
F	
F	
F	
F	

$: \supset : r \vee s$
V
V
V
V
V
V
V
V
V
V
V
V
V
V
V

Hay una forma más sencilla y práctica de hacer las tablas. Consiste en poner los valores que se asignan y resultan directamente debajo de las variables y operadores, respectivamente, sin desglosar la función.

Con los mismos ejemplos anteriores:

p	v	q	.	p	⊃	q
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	V	F

$\sim(p \supset q)$	.	$\equiv$	.	p	.	$\sim q$
F	V	V	V	V	F	F
V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	F	F	V

$\sim(\sim p \supset q \vee \sim p)$	.	.	.	q	v	$\sim p$
F	F	V	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V

p	.	q	.	v	.	$\sim p$	.	$\sim r$	:	$\supset$	:	q	$\equiv$	r
V	V	V	V	V	F	V	F	F	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	F	F	V	F	F	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	F	F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	F	F
F	F	F	F	F	V	F	F	V	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	V	F

p	v	q	:	p	⊃	r	.	q	⊃	s	:	r	v	s
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V	F	V	F	F	V	V	V	F
V	V	V	F	V	F	F	F	V	V	V	V	F	V	V
V	V	V	F	V	F	F	F	V	F	F	V	F	F	F
V	V	F	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	F	V	F	V	V	V	F
V	V	F	F	V	F	F	F	F	V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F	F	F	F	V	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	F	V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	V	F	F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	F	V	V	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	F	F	F

Ejercicio 4.-

Hágase las tablas, con y sin desglose, de las siguientes funciones:

1)  $p \vee q \cdot \sim q \cdot \supset \cdot p$

2)  $p \cdot r \cdot \supset \cdot q$

3)  $\sim(p \cdot \sim q) \vee \sim r$

4)  $\sim[\bar{p} \supset q \cdot \equiv \cdot \sim(p \cdot \sim q)]$

---

## EL METODO DE QUINE. -

Además del de las matrices o tablas, contamos con otro método, más práctico, rápido y cómodo, especialmente en casos complejos, para decidir las funciones que venimos tratando. En el presente capítulo se trata de exponer y resumir este método, que debemos al lógico Willard Quine.

Lo primero que hacemos es canjear nuestros "V", "F", que representaban, respectivamente, los valores veritativos de verdad y falso, por " $\top$ " y " $\perp$ ", que van a representarnos, así mismo respectivamente, los valores veritativos de verdad y falso. (" $\top$ " procede de la palabra inglesa para "verdad": "True").

El método de Quine consiste, sencillamente, en sustituir, en la función de cuya decisión se trata, las variables por los signos de su valor veritativo, permitiéndonos, con ello, reducir la función a su valor veritativo. Así, por ejemplo, si quisiéramos decidir la función " $p \vee q$ ", para el caso en que a " $p$ " se le asigna el valor veritativo de verdad y a " $q$ " el de falso, pondremos " $\top \vee \perp$ ". Pero sabemos que una disyunción con un término verdadero es verdadera, en virtud de lo cual reduci-

mos " $\top \vee \perp$ " a " $\top$ ".

Otro ejemplo. Si quisiéramos decidir la función, un poco más compleja:

$$\sim(p \cdot q) \cdot v. r \supset p \equiv \sim p$$

Para el caso en que se le asigna a "p" el valor de verdad, a "q" el de falso y a "r" el de verdad, tendremos, haciendo la sustitución indicada:

$$\sim(\top \cdot \perp) \cdot v. \top \supset \top \equiv \sim \top$$

Procediendo primero con las funciones de menor alcance, (este orden es provisional), reducimos la conjunción " $\top \cdot \perp$ " a " $\perp$ ". Porque una conjunción con un término falso es falsa. Con ello, queda la función:

$$\sim(\perp) \cdot v. \top \supset \top \equiv \sim \top$$

Pero " $\sim(\perp)$ " es igual a " $\sim \perp$ ". Y sabemos que la negación de una proposición falsa es verdadera, en virtud de lo cual reducimos " $\sim \perp$ " a " $\top$ ". De paso, notamos que el último signo, " $\sim \top$ ", también está negado, y lo reducimos a " $\perp$ ", porque la negación de una proposición verdadera es falsa. Con ello, queda la función:

$$\top \cdot v. \top \supset \top \equiv \perp$$

Procediendo siempre primero por las funciones de menor alcance, abordamos la condicional " $\top \supset \top$ " que, evidentemente, se reduce a " $\top$ ", porque una condicional con antecedente y consecuente verdaderos, es verdadera. Con ello, queda la función:

$$\top \vee \top \equiv \perp$$

La disyunción " $\top \vee \top$ " la reducimos a " $\top$ ", quedando así la función en:

$$T \equiv \perp$$

Y esta bicondicional la reducimos a " $\perp$ ", porque una bicondicional flanqueada por diferentes valores veritativos, es falsa.

Con ello, queda la función entera reducida a:

$$\perp$$

Es decir, el valor veritativo de la función es, para esa asignación de valores de "p", "q" y "r", el de falso.

Todos los pasos anteriores pueden simplificarse si deducimos, de lo que ya sabemos de los operadores, estas nueve reglas:

- 1) INVIERTANSE LOS SIGNOS NEGADOS. Es decir, " $\sim T$ " se reduce a " $\perp$ ", y " $\sim \perp$ " a " $T$ ". Porque la negación de una proposición verdadera es falsa, y la negación de una proposición falsa es verdadera.
- 2) EN UNA DISYUNCION CON " $T$ " COMO UNO DE SUS TERMINOS, SUPRIMASE EL OTRO TERMINO. Es decir, " $T \vee \perp$ ", " $\perp \vee T$ ", " $T \vee T$ ", " $T \vee q$ ", " $q \vee T$ ", se reducen a " $T$ ". Porque una disyunción con un término verdadero, es verdadera.
- 3) EN UNA DISYUNCION CON " $\perp$ " COMO UNO DE SUS TERMINOS, SUPRIMASE " $\perp$ ". Es decir, " $\perp \vee T$ ", " $T \vee \perp$ ", se reducen a " $T$ ", y " $\perp \vee \perp$ " a " $\perp$ ". Del mismo modo, " $\perp \vee q$ ", " $q \vee \perp$ ", se reducen a " $q$ ": la disyunción tendrá el valor veritativo de "q", y será falsa si "q" es falso, -si los dos términos de la disyunción son falsos-, y verdad

si "q" es verdad, -si al menos uno de los términos de la disyunción es verdad-. Porque una disyunción con un término falso es verdad o falso según que el otro término sea, respectivamente, verdad o falso.

- 4) EN UNA CONJUNCION CON "T" COMO UNO DE SUS TERMINOS, SUPRIMASE "T". Es decir, " $T \cdot \perp$ ", " $\perp \cdot T$ ", se reducen a " $\perp$ ", y " $T \cdot T$ " se reduce a "T". Del mismo modo, " $T \cdot q$ ", " $q \cdot T$ " se reducen a "q": la conjunción tendrá el valor veritativo de "q", y será verdad si "q" es verdad, -cuando los dos términos de la conjunción son verdaderos- y falsa si "q" es falso, -cuando uno de los términos de la conjunción es falso-. Porque una conjunción con un término verdadero es verdadera o falsa según que el otro término sea, respectivamente, verdad o falso.
- 5) EN UNA CONJUNCION CON " $\perp$ " COMO UNO DE SUS TERMINOS, SUPRIMASE EL OTRO TERMINO. Es decir, " $\perp \cdot T$ ", " $T \cdot \perp$ ", " $\perp \cdot q$ ", " $q \cdot \perp$ ", se reducen a " $\perp$ ". Porque en una conjunción, basta que un término sea falso para que sea falsa.
- 6) EN UNA CONDICIONAL QUE TENGA "T" COMO ANTECEDENTE O CONSECUENTE, SUPRIMASE EL ANTECE-

DENTE. Es decir, " $T \supset T$ ", " $\perp \supset T$ ", " $T \supset \perp$ ", se reducen, respectivamente, a " $T$ ", " $T$ ", " $\perp$ ", y " $T \supset q$ ", " $q \supset T$ ", se reducen, respectivamente, a " $q$ ", " $T$ ". Porque una condicional con el antecedente o el consecuente verdadero, es verdad o falsa según que el consecuente sea, respectivamente, verdad o falso.

- 7) EN UNA CONDICIONAL QUE TENGA " $\perp$ " COMO ANTECEDENTE O CONSECUENTE, INVIERTASE EL ANTECEDENTE, (si se trata de un signo de valor veritativo), O NIEGUESELE, (si se trata de una variable), Y SUPRIMASE EL CONSECUENTE. Es decir, " $\perp \supset T$ ", " $T \supset \perp$ ", " $\perp \supset \perp$ ", se reducen a " $T$ ", " $\perp$ ", " $T$ ", respectivamente, y " $\perp \supset q$ ", " $q \supset \perp$ ", se reducen a " $T$ ", " $\sim q$ ", respectivamente. (En este último caso, la condicional es verdad si " $\sim q$ " es verdad, -si " $q$ " es falso-, y falsa si " $\sim q$ " es falsa, -si " $q$ " es verdad-). Porque una condicional con el antecedente o el consecuente falso, es verdad o falsa según que el antecedente sea, respectivamente, falso o verdad.
- 8) EN UNA BICONDICIONAL CON " $T$ " COMO UNO DE SUS TERMINOS, SUPRIMASE " $T$ ". Es decir, " $T \equiv T$ ", " $\perp \equiv T$ ", " $T \equiv \perp$ ", se reducen a " $T$ ", " $\perp$ ", " $\perp$ ", respectivamente, y " $T \equiv q$ ", " $q \equiv T$ ", se reducen a " $q$ ". Porque una bicondicional con un término

verdadero es verdad o falsa según que el otro término sea, respectivamente, verdad falso.

- 9) EN UNA BICONDICIONAL CON " $\perp$ " COMO UNO DE SUS TERMINOS, SUPRIMASE " $\perp$ " E INVIERTASE EL OTRO TERMINO, (si se trata de un signo de valor veritativo), O NIEGUESELE, (si se trata de una variable). Es decir, " $\perp \equiv \top$ ", " $\top \equiv \perp$ ", " $\perp \equiv \perp$ ", se reducen a " $\perp$ ", " $\perp$ ", " $\top$ ", respectivamente, y " $\perp \equiv q$ ", " $q \equiv \perp$ ", a " $\sim q$ ". (La bicondicional será verdad si " $\sim q$ " es verdad, -si "q" es falsa-, y falsa si " $\sim q$ " lo es, -si "q" es verdad-). Porque una bicondicional con un término falso es verdad o falsa según que el otro término sea, respectivamente, falso o verdad.

Estas reglas bastan para decidir funciones con los cinco operadores que venimos empleando. Si quisiéramos emplear, además, los dos operadores de Sheffer, a las nueve reglas anteriores habría que añadir estas cuatro siguientes:

- 10) EN UNA INCOMPATIBILIDAD CON " $\top$ " COMO UNO DE SUS TERMINOS, SUPRIMASE " $\top$ " E INVIERTASE EL OTRO TERMINO, (si es un signo de valor veritativo), O NIEGUESELE, (si es una variable). Es decir, " $\top / \top$ ", " $\top / \perp$ ", " $\perp / \top$ ", se re-

ducen a " $\perp$ ", " $T$ ", " $\bar{T}$ ", respectivamente, y " $T/q$ ", " $q/T$ ", se reducen a " $\sim q$ ". Porque una incompatibilidad con un término verdadero es verdad o falsa según que el otro término sea, respectivamente, falso o verdad.

- 11) EN UNA INCOMPATIBILIDAD CON " $\perp$ " COMO UNO DE SUS TERMINOS, INVIERTASE " $\perp$ " Y SUPRIMASE EL OTRO TERMINO. Es decir, " $\perp/\perp$ ", " $\perp/T$ ", " $T/\perp$ ", " $\perp/q$ ", " $q/\perp$ ", se reducen a " $T$ ". Porque una incompatibilidad con un término falso es verdad, independientemente de lo que el otro término sea.
- 12) EN UNA NEGACION CONJUNTA CON " $T$ " COMO UNO DE SUS TERMINOS, INVIERTASE " $T$ " Y SUPRIMASE EL OTRO TERMINO. Es decir, " $T\downarrow T$ ", " $T\downarrow\perp$ ", " $\perp\downarrow T$ ", " $T\downarrow q$ ", " $q\downarrow T$ ", se reducen a " $\perp$ ". Porque una negación conjunta con un término verdadero es falsa, independientemente de lo que el otro término sea.
- 13) EN UNA NEGACION CONJUNTA CON " $\perp$ " COMO UNO DE SUS TERMINOS, SUPRIMASE " $\perp$ " E INVIERTASE EL OTRO TERMINO, (si es un signo de valor veritativo), O NIEGUESELE, (si es una variable). Es decir, " $\perp\downarrow\perp$ ", " $\perp\downarrow T$ ", " $T\downarrow\perp$ ", se reducen a " $T$ ", " $\perp$ ", " $\perp$ ", respectivamente, y " $\perp\downarrow q$ ",

" $q \downarrow \perp$ ", se reducen a " $\sim q$ ". Porque una negación conjunta con un término falso, es verdad o falsa según que el otro término sea, respectivamente, falso o verdad.

No interesa saberse de memoria estas reglas, pues quien tenga presente el significado de los operadores podrá ir deduciéndolas sobre la marcha. Su aplicación, sin embargo, es muy interesante, porque nos permite saber, rápida y cómodamente, exactamente qué se dice en un argumento, ya que con estas reglas podemos decidir cualquier función de las que venimos tratando para alguna asignación determinada de valores o para todas en general. Decidamos, para toda asignación de valores, la función aparecida ya anteriormente:

$$\sim(p \cdot q) \cdot v. r \supset p \equiv \sim p$$

Lo primero que hacemos es sustituir por " $\top$ " cualquiera de sus variables. Sin embargo, conviene comenzar por la variable más veces repetida, porque se reducen así más rápidamente las funciones y el trabajo que ello nos ahorra es considerable. Cuando dos o más variables están repetidas igual número de veces, procedemos por orden alfabético. En la función citada " $p$ " es la variable más veces repetida. Comenzamos, pues, por ella. En el proceso, se irá indicando a la derecha y entre paréntesis el número de la regla que se ha aplicado en cada caso. El uso de las reglas nos permite ir reduciendo, no ya las funciones de menor alcance primero, como se hizo anteriormente, sino

aquellas cuya reducción comporta la mayor ventaja para llegar rápidamente al valor veritativo de la función completa, es decir, la que suprime mayor parte de la función.

$$\sim(T. q) .v. r \supset T \equiv: \sim T$$

$$\sim q \vee T \equiv: \perp \quad (4, 6, 1)$$

$$T \equiv \perp \quad (2)$$

$$\perp \quad (9)$$

Es decir, que la función es falsa para el caso en que "p" es verdad, independientemente de lo que "q" y "r" sean. Con esto, tenemos decidida la función para los cuatro siguientes casos:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F

A continuación, sustituimos "p" por " $\perp$ ", y obtenemos:

$$\sim(\perp. q) .v. r \supset \perp \equiv: \sim \perp$$

$$\sim \perp \vee \sim r \equiv: T \quad (5, 7, 1)$$

$$T \vee \sim r \equiv: T \quad (1)$$

$$T \equiv T \quad (2)$$

$$T \quad (8)$$

Es decir, que la función es verdadera para el caso en que "p" es falso, independientemente de lo que "q" y "r" sean. Con esto tenemos ya decidida la función para los cuatro casos restantes:

p	q	r
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Vemos, pues, que este método nos permite saber con facilidad y rapidez cuál es la información decisiva que necesitamos para saber si un argumento es verdad o falso. En el caso de la función que acabamos de tratar, ha resultado ser verdadera siempre que "p" fuese falso, y falsa siempre que "p" fuese verdad. Bastaría demostrar, lógicamente o con hechos, que "p" es verdad para refutar ese argumento. Bastaría demostrar que "p" es falso para probar que el argumento es verdad. Toda otra información relativa a la verdad y falsedad de "q" y "r", sobra. En rigor, se habría podido decir lo mismo diciendo sencillamente " $\sim p$ ".

Veamos otro ejemplo. Decidamos, para todos los casos posibles, la función:

$$p \cdot q \cdot v \cdot \sim p \cdot \sim r : \supset : q \equiv r$$

Tanto "p", "q" y "r" aparecen en la función igual número de veces. Procedemos, por tanto, por orden alfabético. Es decir, asignándole el valor de verdad primero a "p":

$$T \cdot q \cdot v \cdot \sim T \cdot \sim r : \supset : q \equiv r$$

$$q \cdot v \cdot \perp \cdot \sim r : \supset : q \equiv r \quad (4, 1)$$

$$q \cdot v \cdot \perp \cdot \supset \cdot q \equiv r \quad (5)$$

$$q \cdot \supset \cdot q \equiv r \quad (3)$$

Como no podemos seguir adelante, le asignamos a "q" (aparece dos veces) el valor de verdad:

$$T \cdot \supset \cdot T \equiv r$$

$$T \equiv r \quad (6)$$

$$r \quad (8)$$

Para seguir adelante, le asignamos a "r" el valor de verdad, y nos queda:

$$T$$

Es decir, para el caso en que "p" es verdad, "q" verdad y "r" verdad, la función es verdad. Con esto, tenemos decidida la función para uno de los ocho casos posibles. Para averiguar los restantes, seguimos el camino inverso asignándole a "r" esta vez el valor de falso, y tenemos:

$$\perp$$

Es decir, la función es falsa en el caso de "p" verdad, "q" verdad y "r" falso. Con esto tenemos ya dos casos de los ocho posibles. Seguimos subiendo y nos topamos con la función intermedia "q  $\supset$  q  $\equiv$  r". Le asignamos a "q" el valor de falso, y queda:

$$\perp \supset \perp \equiv r$$

$$T$$

(7)

Es decir, para el caso en que "p" es verdad y "q" falso, la función es verdad, independientemente de lo que "r" sea. Con esto tenemos dos casos más:

p	q	r
V	F	V
V	F	F

Faltan, pues, cuatro más, puesto que el número de casos posibles para una función de tres variables es  $2^3 = 8$ . Para encontrarlos, seguimos subiendo en el camino de vuelta y nos topamos con la función original. Esta vez le asignamos a "p" el valor de falso:

$$\perp \supset q \supset \sim \perp \supset \sim r \supset \supset : q \equiv r$$

$$\perp . v . T . \sim r : \supset : q \equiv r \quad (5, 1)$$

$$\perp v \sim r . \supset . q \equiv r \quad (4)$$

$$\sim r . \supset . q \equiv r \quad (3)$$

Para seguir adelante, le asignamos a la variable más veces repetida, es decir, "r", el valor de verdad, y tenemos:

$$\sim T . \supset . q \equiv T$$

$$\perp . \supset . q \equiv T \quad (1)$$

$$T \quad (7)$$

La función, pues, es verdad para el caso en que "p" sea falso y "r" verdad, independientemente de lo que sea "q". Con esto, hemos logrado dos casos más:

p	q	r
F	V	V
F	F	V

Iniciamos ahora el camino de vuelta, hacia arriba, y nos topamos con " $\sim r . \supset . q \equiv r$ " y le asignamos a "r" (aparece dos veces) el valor de falso:

$$\sim \perp . \supset . q \equiv \perp$$

$$T . \supset . q \equiv \perp \quad (1)$$

$$q \equiv \perp \quad (6)$$

$$\sim q \quad (9)$$

Para seguir adelante, le asignamos a "q" el valor de verdad:

$$\sim T$$

$$\perp \quad (1)$$

Con lo que hemos logrado un caso más, el de "p" falso, "r" falso y "q" verdad. Para llegar al último caso, le asignamos a "q" el valor de falso:

$$\frac{\sim \perp}{\top} \quad (1)$$

Es decir, la función es verdad para el caso en que "p" es falso, "r" falso y "q" falso.

Todo lo anterior puede simplificarse haciendo mentalmente los pasos evidentes y escribiendo a la izquierda la sustitución de la variable más veces aparecida por "T", y a la derecha su sustitución por "⊥". Tampoco es necesario indicar las reglas que se aplican. Lo único que conviene, quizá, es tirar una raya debajo de la expresión después de la cual viene una nueva asignación de valores. Unos cuantos ejemplos dejarán claro este método:

$$\underline{\sim(p \cdot q) \cdot v \cdot r \supset p} \equiv \sim p$$

$$\sim(T \cdot q) \cdot v \cdot r \supset T \equiv \perp \quad \sim(\perp \cdot q) \cdot v \cdot r \supset \perp \equiv T$$

$$\sim q \vee T \equiv \perp$$

$$\sim \perp \vee \sim r \equiv T$$

$$T \equiv \perp$$

$$T \vee \sim r \equiv T$$

$$\perp$$

$$T \vee \sim r$$

$$T$$

$$\underline{p \cdot q \cdot v \cdot \sim p \cdot \sim r} \supset q \equiv r$$

$$T \cdot q \cdot v \cdot \perp \cdot \sim r \supset q \equiv r \quad \perp \cdot q \cdot v \cdot T \cdot \sim r \supset q \equiv r$$

$$q \vee \perp \supset q \equiv r$$

$$\perp \vee \sim r \supset q \equiv r$$

$$\underline{q \supset q \equiv r}$$

$$\underline{\sim r \supset q \equiv r}$$

$$T \supset T \equiv r \quad \perp \supset \perp \equiv r$$

$$\perp \supset q \equiv r \quad T \supset q \equiv \perp$$

$$T \equiv r$$

$$T$$

$$T$$

$$q \equiv \perp$$

$$\underline{r}$$

$$\underline{\sim q}$$

$$T \quad \perp$$

$$\perp \quad T$$

$$\sim(\sim p \supset q \vee \sim p)$$

$$\sim(\perp \supset q \vee \perp) \quad \sim(T \supset q \vee T)$$

$$\sim T$$

$$\sim(q \vee T)$$

$$\perp$$

$$\sim T$$

$$\perp$$

$$\underline{pvq : pcr . qps \supset rvs}$$

$$Tvq : Tcr . qps \supset rvs$$

$$\perp vq : \perp cr . qps \supset rvs$$

$$T : r . qps \supset rvs$$

$$q : T . qps \supset rvs$$

$$\underline{r . qps \supset rvs}$$

$$\underline{q . qps \supset rvs}$$

$$T . qps \supset rvs$$

$$\perp . qps \supset rvs$$

$$T . Tcr . qps \supset rvs$$

$$\perp . \perp cr . qps \supset rvs$$

$$qps \supset rvs$$

$$scs$$

$$\underline{s . qps \supset rvs}$$

$$\perp . qps \supset rvs$$

$$T$$

$$T$$

$$T . cr . rvt$$

$$\perp . cr . rvt$$

$$T$$

$$rvt$$

$$T$$

$$T$$

$$\underline{p . q \supset rvs \equiv t : v : u}$$

$$T . q \supset rvs \equiv t : v : u$$

$$\perp . q \supset rvs \equiv t : v : u$$

$$q \supset rvs \equiv t : v : u$$

$$\perp . \supset rvs \equiv t : v : u$$

$$T . \supset rvs \equiv t : v : u$$

$$\perp . \supset rvs \equiv t : v : u$$

$$T$$

$$\underline{rvs \equiv t : v : u}$$

$$T$$

$$T vs \equiv t : v : u \quad \perp vs \equiv t : v : u$$

$$T \equiv t . v . u$$

$$s \equiv t . v . u$$

$$\underline{tvu}$$

$$T \equiv t . v . u \quad \perp \equiv t . v . u$$

$$Tvu \quad \perp vu$$

$$\underline{tvu}$$

$$\underline{\sim tvu}$$

$$T \quad \perp$$

$$Tvu \quad vu \quad \perp vu \quad Tvu$$

$$T \quad \perp$$

$$T \quad \perp \quad \perp \quad T \quad \perp$$

$$\underline{\sim(p / \sim q \cdot / \cdot q / \sim p)}$$

$$\sim(T / \sim q \cdot / \cdot \perp)$$

$$\sim(\perp / \sim q \cdot / \cdot q / T)$$

$$\sim(q / T)$$

$$\sim(T / \sim q)$$

$$T \quad \underline{q} \quad \perp$$

$$\perp \quad \underline{\sim q} \quad T$$

$$\underline{\sim p \downarrow q \cdot \downarrow \cdot \sim q \downarrow p}$$

$$\perp \downarrow q \cdot \downarrow \cdot \sim q \downarrow T$$

$$T \downarrow q \cdot \downarrow \cdot \sim q \downarrow \perp$$

$$\sim q \downarrow \perp$$

$$\perp \downarrow q$$

$$T \quad \underline{q} \quad \perp$$

$$\perp \quad \underline{\sim q} \quad T$$

### Ejercicio 5.-

Decídase, con el método expuesto en el presente capítulo, las funciones del ejercicio 4.

## LAS TRANSFORMACIONES . -

Considérense las siguientes tablas:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim p \cdot \sim q$	$\sim(\sim p \cdot \sim q)$	$\sim p \supset q$
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	F	F

Ellas nos indican que las siguientes expresiones:

$$p \vee q; \sim(\sim p \cdot \sim q); \sim p \supset q;$$

tienen todas la misma matriz, (el mismo valor veritativo en los mismos casos). Sabemos que cuando dos funciones tienen siempre el mismo valor veritativo, son equivalentes, (bicondicional verdadera en todos los casos), y que podemos intercambiarlas, usar la una por la otra, puesto que lógicamente son lo mismo.

Expresado simbólicamente:

$$p \vee q \equiv \sim(\sim p \cdot \sim q) \equiv \sim p \supset q$$

(No se especifica cuál de las bicondicionales tiene mayor alcance porque, según se verá después, en este caso es indiferente).

Por ejemplo:

Voy al cine o al teatro. ( $p \vee q$ )

Puedo decirlo igualmente, de acuerdo con lo anterior:

Es falso que no voy al cine y que no voy al teatro.  $[\sim(\sim p \cdot \sim q)]$   
 Si no voy al cine, voy al teatro.  $(\sim p \supset q)$

Lo anterior permite que podamos establecer la siguiente regla para la transformación de la disyunción: Para expresar una disyunción como conjunción, hemos de negar la función y ambos términos. Para expresarla como condicional, basta negar el primer término.

Está claro intuitivamente (y puede comprobárselo fácilmente mediante esa inducción completa que es la tabla) que:

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

Por lo que, de acuerdo con la regla de arriba, por ejemplo:

$$\sim p \vee q \equiv \sim(\sim p) \supset q \equiv p \supset q$$

En virtud de lo cual podemos formular la regla de este modo:

Para transformar una disyunción en conjunción, cámbiesele el signo a la función y a cada uno de sus términos.

Para transformar una disyunción en condicional, cámbiesele el signo al primer término.

Por ejemplo, la siguiente disyunción:

No me pegues o te pego.  $(\sim p \vee q)$

Se transforma, en conjunción y condicional, respectivamente:

No es el caso que me pegas y que yo no te pego.  $[\sim(p \cdot \sim q)]$   
 Si me pegas, te pego.  $(p \supset q)$

Esta disyunción negada:

No es el caso que trabajo o no como.  $[\sim(p \vee \sim q)]$

Se transforma en conjunción y condicional, respectivamente:

No trabajo y como. ( $\sim p \cdot q$ )

Es falso que si no trabajo no como. [ $\sim(\sim p \supset \sim q)$ ]

Considérense ahora las siguientes tablas:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \cdot q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(\sim p \vee \sim q)$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	F	V	F

$p \supset q$	$\sim(p \supset \sim q)$
F	V
V	F
V	F
V	F

Es decir:

$$p \cdot q \equiv \sim(\sim p \vee \sim q) \equiv \sim(p \supset \sim q)$$

De donde podemos sacar la siguiente regla para la transformación de conjunciones:

Para transformar una conjunción en disyunción, cámbiesele el signo a la función y a cada uno de sus términos.

Para transformar una conjunción en condicional, cámbiesele el signo a la función y al segundo término.

Por ejemplo, la siguiente conjunción:

Estudio pero no aprovecho. ( $p \cdot \sim q$ )

En disyunción (negada):

No es el caso que no estudio o aprovecho. [ $\sim(\sim p \vee q)$ ]

En condicional (negada):

Es falso que si estudio aprovecho. [ $\sim(p \supset q)$ ]

Considérense ahora las siguientes tablas:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \supset q$	$\sim p \vee q$	$p \cdot \sim q$	$\sim(p \cdot \sim q)$
V	V	F	F	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	F	V

Es decir:

$$p \supset q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim(p \cdot \sim q)$$

De donde sacamos la siguiente regla de transformación para la condicional:

Para transformar una condicional en disyunción, cámbiesele el signo al primer término.

Para transformar una condicional en conjunción, cámbiesele el signo a la función y al segundo término.

Por ejemplo, la condicional:

Si no vienes, no voy. ( $\sim p \supset \sim q$ )

Se transforma en disyunción y conjunción, respectivamente:

Vienes o no voy. ( $p \vee \sim q$ )

Es falso que no vienes y que voy. [ $\sim(\sim p \cdot q)$ ]

Es evidente que todas estas reglas se habrían podido derivar de cualquiera de las tablas que hemos considerado, porque con la misma regla que nos permite transitar de una disyunción a una conjunción o condicional, se puede hacer el camino inverso pasando de la condicional o conjunción a la disyunción. Las reglas, entonces, podemos expresarlas, más económicamente, así:

PARA PASAR DE UNA DISYUNCION A UNA CONJUNCION, Y VICEVERSA, CAMBIESE EL SIGNO DE LA FUNCION Y DE CADA UNO DE LOS TERMINOS.

PARA PASAR DE UNA CONJUNCION A UNA CONDICIONAL, Y VICEVERSA, CAMBIESE EL SIGNO DE LA FUNCION Y DEL SEGUNDO TERMINO.

PARA PASAR DE UNA CONDICIONAL A UNA DISYUNCIÓN, Y VICEVERSA, CAMBIESE EL SIGNO DEL PRIMER TÉRMINO.

Es igualmente evidente que estas reglas pueden aplicarse en funciones todo lo complejas que se quieran. Por ejemplo:

Si un cuerpo está en reposo o en velocidad constante, entonces está en equilibrio.  $p \vee q \supset r$

Podemos expresarla con disyunciones:

No es el caso que un cuerpo está en reposo o en velocidad constante, o está en equilibrio.  $\sim(p \vee q) \vee r$

Con condicionales:

Si un cuerpo no está en reposo, está en velocidad constante, sólo si está en equilibrio.  $\sim p \supset q \supset r$

Con conjunciones:

Es falso que no es el caso que un cuerpo no está en reposo y no está en velocidad constante y que no está en equilibrio.  $\sim[\sim(\sim p \cdot \sim q) \cdot \sim r]$

La anterior transformación ha desembocado en una selva gramatical pero desde un punto de vista lógico dice exactamente lo mismo que las otras proposiciones.

También se puede, por supuesto, emplear diferentes operadores. Por ejemplo (disyunción y conjunción):

No es el caso que un cuerpo está en reposo o velocidad constante y no está en equilibrio.  $\sim(p \vee q \cdot \sim r)$

Hemos prescindido de la bicondicional porque esta función es verdadera y falsa en dos casos, razón por la cual es imposible expresar cualquiera otra función en términos de ella. Lo que sí puede hacerse, evidentemente, es expresar la bicondicional

en términos de cualquiera de los operadores:

$$p \equiv q \equiv p \supset q \cdot q \supset p \equiv \sim [\sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim q \vee p)] \equiv \sim (p \cdot \sim q) \cdot \sim (q \cdot \sim p) \equiv \sim [p \supset q \cdot \supset \cdot \supset \cdot \sim (q \supset p)]$$

Estas transformaciones son útiles, sobre todo pedagógicamente, porque son bien sólitos los casos en que basta asediar a una inteligencia torpe desde diferentes ángulos para rendirla, es decir, diciéndole lo mismo de diferentes maneras hasta llevarla a la comprensión diáfana. Sucede también con frecuencia que una información enrevesada puede expresarse muchas veces más transparente a la intuición cambiándole su forma. Por ejemplo, la proposición:

No es el caso que un cuerpo está en reposo o en velocidad constante y que no está en equilibrio, ni tampoco que está en equilibrio pero no en reposo o velocidad constante.  $\sim (p \vee q \cdot \sim r) \cdot \sim [r \cdot \sim (p \vee q)]$

Es un caso que puede transformarse en:

$$p \vee q \cdot \supset \cdot r : r \cdot \supset \cdot p \vee q$$

Es decir:

Si un cuerpo está en reposo o en velocidad constante, entonces está en equilibrio, y si un cuerpo está en equilibrio, entonces está en reposo o en velocidad constante.

Pero esto es lo mismo que:

$$p \vee q \equiv r$$

Es decir, mucho más claramente que la proposición original:

Un cuerpo está en reposo o en velocidad constante si, y sólo si está en equilibrio.

Por otra parte, es fácil comprobar (con las tablas) que:

$$\begin{aligned} p \vee q &\equiv \sim p / \sim q \equiv \sim(p \downarrow q) \\ p \cdot q &\equiv \sim(p / q) \equiv \sim p \downarrow \sim q \\ p \supset q &\equiv p / \sim q \equiv \sim(\sim p \downarrow q) \end{aligned}$$

Es igualmente fácil derivar las reglas para transitar de los operadores conocidos a los de Sheffer y viceversa. Con los operadores de Sheffer, además, hay una particularidad bien notable, y es que comoquiera que:

$$\sim p \equiv p / p \equiv p \downarrow q$$

(según puede comprobarse con tablas), podemos expresar los operadores conocidos sin necesidad de echar mano a la negación, puesto que también ella puede expresarse en términos de cualquiera de los dos operadores de Sheffer:

$$\begin{aligned} p \vee q &::\equiv:: p / p \cdot / q / q ::\equiv:: p \downarrow q \cdot \downarrow \cdot p \downarrow q \\ p \cdot q &::\equiv:: p / q \cdot / p / q ::\equiv:: p \downarrow p \cdot \downarrow \cdot q \downarrow q \\ p \supset q &::\equiv:: p \cdot / q / q ::\equiv:: p \downarrow p \cdot \downarrow \cdot q : \downarrow : \\ &: \downarrow : p \downarrow p \cdot \downarrow \cdot q \end{aligned}$$

Y también, por supuesto:

$$\begin{aligned} p / q &::\equiv:: p \downarrow p \cdot \downarrow \cdot q \downarrow q : \downarrow : p \downarrow p \cdot \downarrow \cdot q \downarrow q \\ p \downarrow q &::\equiv:: p / p \cdot / q / q ::\equiv:: p / p \cdot / q / q \end{aligned}$$

En consecuencia, pues, que podemos expresar cualquier función en términos de cualquier operador (más la negación, salvo si se emplea alguno de los dos operadores de Sheffer).

ooOoo

Si el número de operadores (menos la negación) de un lengua-

je es  $k$ , y  $n$  el número de operadores de una proposición o argumento, resulta, según el análisis combinatorio, que  $k^n$  es el número de transformaciones de esa proposición o argumento. Ahora bien, como las variables pueden conmutarse (incluso la condicional, transformándola previamente a disyunción o conjunción, que sí gozan de la propiedad conmutativa), el número anterior debe multiplicarse por  $2n$ , porque hay dos maneras de expresar cada una de las  $n$  funciones. Por tanto

$$2nk^n$$

Es el número de formas en que puede decirse cualquier cosa con  $n$  operadores en un lenguaje con  $k$  operadores. Es evidente que de estas  $2nk^n$  formas de decir lógicamente lo mismo, hay muchas gramaticalmente torpes. La diferencia entre ellas, sin embargo, es puramente retórica.

Por ejemplo, sea de nuevo la proposición:

Si un cuerpo está en reposo o en velocidad constante, entonces está en equilibrio.

Que representamos simbólicamente:

$$p \vee q \cdot \supset \cdot r$$

En un lenguaje con tres operadores sólo (más la negación): " $\vee$ ", " $\cdot$ ", " $\supset$ ", se la puede decir de  $2 \times 2 \times 3^2 = 36$  maneras diferentes:

- 1)  $\sim(p \vee q) \vee r$
- 2)  $\sim(p \vee q \cdot \sim r)$
- 3)  $p \vee q \cdot \supset \cdot r$
- 4)  $\sim p \cdot \sim q \cdot \vee \cdot r$
- 5)  $\sim [(\sim p \cdot \sim q) \cdot \sim r]$

- 6)  $\sim(\sim p \cdot \sim q) \supset r$   
 7)  $\sim(\sim p \supset q) \vee r$   
 8)  $\sim(\sim p \supset q \cdot \sim r)$   
 9)  $\sim p \supset q \cdot \supset \cdot r$
- 10)  $r \vee \sim(p \vee q)$   
 11)  $r \cdot \vee \cdot \sim p \cdot \sim q$   
 12)  $r \vee \sim(\sim p \supset q)$   
 13)  $\sim(\sim r \cdot p \vee q)$   
 14)  $\sim[\sim r \cdot \sim(\sim p \cdot \sim q)]$   
 15)  $\sim(\sim r \cdot \sim p \supset q)$   
 16)  $\sim r \supset \sim(p \vee q)$   
 17)  $\sim r \cdot \supset \cdot \sim p \cdot \sim q$   
 18)  $\sim r \supset \sim(\sim p \supset q)$
- 19)  $\sim(q \vee p) \vee r$   
 20)  $\sim(q \vee p \cdot \sim r)$   
 21)  $q \vee p \cdot \supset \cdot r$   
 22)  $\sim q \cdot \sim p \cdot \vee \cdot r$   
 23)  $\sim[\sim(\sim q \cdot \sim p) \cdot \sim r]$   
 24)  $\sim(\sim q \cdot \sim p) \supset r$   
 25)  $\sim(\sim q \supset p) \vee r$   
 26)  $\sim(\sim q \supset p \cdot \sim r)$   
 27)  $\sim q \supset p \cdot \supset \cdot r$
- 28)  $r \vee \sim(q \vee p)$   
 29)  $r \cdot \vee \cdot \sim q \cdot \sim p$   
 30)  $r \vee \sim(\sim q \supset p)$   
 31)  $\sim(\sim r \cdot q \vee p)$   
 32)  $\sim[\sim r \cdot \sim(\sim q \cdot \sim p)]$   
 33)  $\sim(\sim r \cdot \sim q \supset p)$   
 34)  $\sim r \supset \sim(q \vee p)$   
 35)  $\sim r \cdot \supset \cdot \sim q \cdot \sim p$   
 36)  $\sim r \supset \sim(\sim q \supset p)$

En la página 92 han aparecido, ejemplificando, los números 1, (o 19, que le es muy semejante incluso retóricamente), 2 (o 20), 3 (o 21), 5 (o 23), 9 (o 27).

Otros interesantes son:

No es el caso que si un cuerpo no está en reposo ni en velocidad constante, está en equilibrio. (6 o 24)

Un cuerpo está en equilibrio o no es el caso que está en reposo o en velocidad constante. (10 o 28)

Un cuerpo está en equilibrio o no está en reposo ni en velocidad constante. (11 o 29)

Si un cuerpo no está en equilibrio, entonces no está en reposo ni en velocidad constante. (17 o 35)

Uno un poco menos diáfano es:

Si un cuerpo no está en equilibrio, entonces es falso que si no está en reposo, está en velocidad constante. (18 o 36)

Por otra parte, la proposición (más rigurosa que la que acabamos de transformar):

Un cuerpo está en reposo o en velocidad constante si, y sólo si está en equilibrio.

Que simbólicamente se expresa:

$$p \vee q \equiv r$$

Pero, comoquiera que eso es lo mismo que:

$$p \vee q \supset r : r \supset p \vee q$$

Hay, en las mismas condiciones anteriores, exactamente  $2 \times 5 \times 3^5 = 2430$  maneras diferentes de decir lo mismo, y que pueden obtenerse bien fácilmente siguiendo el método que empleamos en el ejemplo anterior.

Ejercicio 6.-

a) Expresar, en términos de disyunción:

- 1)  $p \supset q$
- 2)  $\sim p \supset q$
- 3)  $p \supset \sim q$
- 4)  $\sim p \supset \sim q$
- 5)  $\sim(\sim p \supset q)$
- 6)  $\sim(p \supset \sim q)$
- 7)  $\sim(\sim p \supset \sim q)$
- 8)  $p \supset q \cdot \supset \cdot r \supset s$
- 9)  $p \supset \sim q \cdot \supset \cdot \sim r \supset s$
- 10)  $p \supset q \cdot \supset \cdot \sim(r \supset \sim s)$
- 11)  $\sim(p \supset \sim q \cdot \supset \cdot r \supset s)$
- 12)  $p \cdot \supset \cdot q \supset r : \supset : s$
- 13)  $p \cdot \supset \cdot \sim q \supset r : \supset : \sim s$
- 14)  $\sim(\sim p \cdot \supset \cdot \sim q \supset \sim r : \supset : \sim s)$
- 15)  $\sim p : \supset : q \cdot \supset \cdot r \supset \sim s$
- 16)  $p \cdot q$
- 17)  $\sim p \cdot q$
- 18)  $p \cdot \sim q$
- 19)  $\sim p \cdot \sim q$
- 20)  $\sim(\sim p \cdot q)$
- 21)  $\sim(\sim p \cdot \sim q)$
- 22)  $p \cdot q : r \cdot s$
- 23)  $\sim p \cdot q : \sim(r \cdot \sim s)$
- 24)  $\sim(p \cdot \sim q : \sim r \cdot \sim s)$
- 25)  $p \cdot \cdot q \cdot r : s$
- 26)  $\sim p \cdot \cdot q \cdot \sim r : \sim s$
- 27)  $p \equiv q$
- 28)  $\sim p \equiv q$
- 29)  $p \equiv \sim q$
- 30)  $\sim p \equiv \sim q$
- 31)  $\sim(p \equiv q)$
- 32)  $\sim(p \equiv \sim q)$
- 33)  $\sim(\sim p \equiv \sim q)$

- 34)  $p \equiv q \equiv r \equiv q$   
 35)  $\sim p \equiv q \equiv \sim s \equiv p$   
 36)  $\sim(\sim p \equiv q) \equiv q \equiv p$   
 37)  $p \cdot q \supset r \cdot s$   
 38)  $p \cdot \sim q \supset \sim(r \cdot s)$   
 39)  $p \supset \sim q \cdot \sim r \vee s : \sim t$   
 40)  $p \cdot \sim q \supset r \supset \sim s : v : t$   
 41)  $p \supset q : v : p \equiv q \cdot \sim r$

b) Expresar, en términos de condicional:

- 42)  $p \vee q$   
 43)  $\sim p \vee q$   
 44)  $p \vee \sim q$   
 45)  $\sim p \vee \sim q$   
 46)  $\sim(\sim p \vee \sim q)$   
 47)  $\sim(p \vee q)$   
 48)  $p \vee q \cdot v \cdot r \vee s$   
 49)  $p \vee \sim q \cdot v \cdot \sim r \vee s$   
 50)  $p \vee q \cdot v \cdot \sim(r \vee \sim s)$   
 51)  $\sim(p \vee \sim q \supset r \vee s)$   
 52)  $p \cdot v \cdot q \vee r : v : s$   
 53)  $p_1 \cdot v \cdot p_2 \vee p_3 : v : p_4$   
 54)  $(p_1 \cdot v \cdot \sim p_2 \vee \sim p_3 : v : \sim p_4)$

Además, todas las funciones desde el número 16 hasta el 41.

c) Expresar, en términos de conjunción, desde el número 1 hasta el 15, y desde el 27 hasta el 54.

d) ¿De cuántas maneras puede decirse, con tres operadores sólo (más la negación) la siguiente proposición?:

Si dos circunferencias tienen el mismo centro y diferentes radios, entonces, y sólo entonces, son concéntricas y la una es mayor o menor que la otra.

e) La siguiente es una información enredada. Transfórmela

hasta llevarla a una formulación clara:

Es falso que no es el caso que no sale electo de diputado o no cumple su palabra y que el pueblo no dobla por él su estima.

---

 E L M E T O D O D E P O S T . -

En uno de los capítulos anteriores se expuso la técnica para, dada una función cualquiera (de las hasta ahora tratadas), hacer su tabla de valores veritativos o matriz. En este capítulo se trata de presentar una técnica inversa mediante la cual, dada una tabla de valores veritativos o matriz, podamos derivar una función a la que le corresponde esa tabla. La técnica, descubierta por el lógico Post, es importante, según se verá después.

Antes de abordarla, hemos de saber que hay un teorema, que demostraremos a su debido tiempo, donde se expresa la ley asociativa para la conjunción. El teorema, que hasta tanto no le demos lógicamente puede comprobársele mediante esa inducción perfecta que es la tabla, dice que:

$$p \cdot q : r \equiv p : q \cdot r$$

Es decir, que es lo mismo asociar "q" con "p" que con "r". En virtud de esta ley, cualquiera de las dos funciones que flanquean la bicondicional pueden ser expresadas así: "p . q . r", sin necesidad de precisar cuál de las dos conjunciones tiene ma-

yor alcance, puesto que son equivalentes (tienen la misma matriz) la expresión de la izquierda, donde es la segunda conjunción la de mayor alcance, y la de la derecha, donde la conjunción de mayor alcance es la primera.

En matemática hay, por cierto, también una ley asociativa para el signo homónimo al del producto lógico o conjunción, es decir, para el signo de la multiplicación. En efecto:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

Y escribimos, cualquiera de las dos expresiones que flanquean el signo de la igualdad: "a x b x c", sin necesidad de tener que precisar con paréntesis cuál de los dos signos de multiplicación tiene mayor alcance.

Ahora bien, si "p . q : r" es equivalente a "p : q . r", resulta que basta que cualquiera de las tres variables tenga el valor de falso para que la función también lo tenga. En general, una conjunción con n variables, "p<sub>1</sub> . p<sub>2</sub> . p<sub>3</sub> . ... . p<sub>n</sub>", es falsa con tal de que uno de sus términos sea falso. Es decir, que para que una conjunción sea verdad, todos sus factores, sean estos cuantos fueren, han de ser verdad.

Con la disyunción pasa lo correspondiente. Hay también, en efecto, un teorema que dice:

$$p \vee q \vee r \equiv p \vee q \vee r$$

Es decir, que también para la disyunción hay una ley asociativa en virtud de la cual es lo mismo asociar "q" con "p" que con "r".

Por ello, cualquiera de los dos extremos de la bicondicional podemos expresarlos así: " $p \vee q \vee r$ ", sin haber tampoco la necesidad de precisar cuál de las dos disyunciones tiene mayor alcance.

En matemática también hay una ley asociativa para el signo homónimo al de la suma lógica o disyunción, es decir, para el signo de la adición. En efecto:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Y escribimos, cualquiera de las dos expresiones que flanquean el signo de la igualdad: " $a + b + c$ ", sin tener que precisar cuál de los dos signos de adición tiene mayor alcance.

Ahora bien, si " $p \vee q \vee r$ " es equivalente a " $p \vee q \vee r$ ", resulta que basta que cualquiera de las tres variables tenga el valor de verdad para que la función también lo tenga. En general, una disyunción con  $n$  variables, " $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \dots \vee p_n$ " es verdad con tal de que uno de sus términos sea verdad. Es decir, que para que una disyunción sea falsa, todos sus componentes, sin importar cuántos sean estos, han de ser falsos.

Además de esos dos teoremas que expresan la ley asociativa para la conjunción y la disyunción, demostraremos, así mismo más adelante, estos otros dos, que expresan la ley conmutativa para la conjunción y la disyunción:

$$p \cdot q \equiv q \cdot p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

Paralelamente, en matemática:

$$a \times b = b \times a$$

$$a + b = b + a$$

Expresan la ley conmutativa para la multiplicación y la adición.

Una última cosa que hay que decir es que, en este capítulo conviene variar el orden hasta ahora seguido de los casos de las tablas. En la primera columna se alternan las V y las F de una en una, en la segunda, de dos en dos, en la tercera, de cuatro en cuatro, etc..., hasta llegar a la última en la que la mitad de la columna es V y la otra mitad F. Es decir, que en vez de, por ejemplo:

<u>p</u>	<u>q</u>	<u>r</u>
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Tendremos:

<u>p</u>	<u>q</u>	<u>r</u>
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	V
V	V	F
F	V	F
V	F	F
F	F	F

El orden en que aparecen los casos es, por supuesto, indiferente, sólo que en este capítulo es preferible seguir el segundo.

Consideremos ahora la matriz de una función cualquiera  $[f(p,q)]$ , de la cual sabemos solamente que contiene dos variables,  $(p, q)$ :

		p	q	f(p,q)
1	Caso	V	V	?
2	"	F	V	?
3	"	V	F	?
4	"	F	F	?

Sabemos que la conjunción " $p \cdot q$ " es verdadera sólo en el primer caso; que la conjunción " $\sim p \cdot q$ " es verdadera sólo en el segundo caso; que la conjunción " $p \cdot \sim q$ " es verdadera sólo en el tercer caso; que la conjunción " $\sim p \cdot \sim q$ " es verdadera sólo en el cuarto caso. Ahora bien, si " $p \cdot q$ " es verdadera sólo en el primer caso (y falsa en todos los casos restantes), entonces la negación de esta función, es decir " $\sim(p \cdot q)$ " es falsa sólo en el primer caso (y verdad en todos los casos restantes). Por lo mismo, " $\sim(\sim p \cdot q)$ " es falso sólo en el segundo caso, y " $\sim(p \cdot \sim q)$ " falso sólo en el tercer caso. Etc... Convengamos en que " $C_1$ " sea la abreviatura para la conjunción cuyos términos o factores son las variables que aparecen en la matriz, afirmados ambos. Está claro que  $C_1$  es verdadera sólo en el primer caso. Del mismo modo, convengamos en que " $C_2$ " sea la abreviatura para la conjunción cuyos factores son las variables que intervienen en la matriz y el primero de los cuales está negado. Por supuesto,  $C_2$  es verdad únicamente en el segundo caso. Y del mismo modo, " $C_3$ ", abreviatura para la conjunción cuyo segundo factor está negado, es verdad únicamente en el tercer caso. Y " $C_4$ ", abreviatura para la conjunción ambos de cuyos factores están negados, es verdad únicamente en el cuarto caso. De todo lo anterior se desprende que  $\sim C_1$  es falso únicamente

en el primer caso;  $\sim C_2$  es falso únicamente en el segundo caso;  $\sim C_3$  es falso únicamente en el tercer caso; etc...

Con la disyunción pasará lo correspondiente. La disyunción " $\sim p \vee \sim q$ " es falsa sólo en el primer caso; " $p \vee \sim q$ " es falsa sólo en el segundo caso; " $\sim p \vee q$ " es falsa sólo en el tercer caso; " $p \vee q$ " es falsa sólo en el cuarto caso. Si negamos cada una de estas funciones, resultará que tal negación es verdad donde la función original es falsa, y falsa donde la función original es verdad. Por tanto, si " $\sim p \vee \sim q$ " era falsa sólo en el primer caso, (y verdad en todos los casos restantes), entonces " $\sim(\sim p \vee \sim q)$ " es verdad sólo en el primer caso, (y falsa en todos los casos restantes). Del mismo modo " $\sim(p \vee \sim q)$ " es verdad sólo en el segundo caso, y " $\sim(\sim p \vee q)$ " es verdad sólo en el tercer caso. Etc...

Al igual que con las conjunciones, les buscamos abreviaturas a las disyunciones. Si en el caso de las conjunciones procedíamos a formarlas afirmando las variables de la matriz cuando en ésta eran interpretadas como verdad, y negándolas cuando en la matriz se las interpretaba como falsas, con la disyunción procedemos a la inversa. Es decir, formamos la disyunción negando las variables cuando en la matriz aparecen como verdad, y afirmándolas cuando en la matriz aparecen como falsas. De acuerdo con esto, " $D_1$ " es la abreviatura para la disyunción ambos de cuyos términos están negados, y que es falsa sólo en el primer caso; " $D_2$ ", la abreviatura para la disyunción cuyo segundo tér-

mino está negado, que es falsa únicamente en el segundo caso; "D<sub>3</sub>", la abreviatura para la disyunción cuyo primer término está negado, y que es falsa sólo en el tercer caso; "D<sub>4</sub>", la abreviatura para la disyunción ambos de cuyos términos están afirmados, y que es falsa únicamente en el cuarto caso. Ahora bien, si D<sub>1</sub> es falso únicamente en el primer caso, (y verdad en todos los casos restantes), entonces  $\sim D_1$  es verdad únicamente en el primer caso, (y falso en todos los casos restantes). Del mismo modo  $\sim D_2$  es verdad sólo en el segundo caso y  $\sim D_3$  es verdad sólo en el tercer caso. Etc...

Si quisiera una función que fuese verdadera únicamente en el primer y segundo caso, no tendría más que tomar dos funciones que fuesen, respectivamente, verdad sólo en el primer y segundo caso y conectarlas con una disyunción. La función resultante será verdad en el primer caso, pues en éste su primer término es verdad, y también en el segundo caso, donde será verdad su segundo término. C<sub>1</sub> y  $\sim D_1$  son verdad sólo en el primer caso, y C<sub>2</sub> y  $\sim D_2$  son verdad sólo en el segundo caso, luego cualquiera de las cuatro funciones siguientes:

$$C_1 \vee C_2$$

$$C_1 \vee \sim D_2$$

$$\sim D_1 \vee \sim D_2$$

$$\sim D_1 \vee C_2$$

Cumplen con la condición que buscábamos; es decir, todas estas son funciones verdaderas únicamente en el primer y segundo ca-

so, y falsos en todos los casos restantes.

Pero es lo mismo ser una función (con dos variables) verdad sólo en el primer y segundo caso que ser una función falsa sólo en el tercer y cuarto caso. Ahora bien, sabemos que  $\sim C_3$  y  $D_3$ ,  $\sim C_4$  y  $D_4$  son falsas únicamente en el tercer y cuarto caso respectivamente, por tanto las siguientes conjunciones:

$$\sim C_3 \cdot \sim C_4$$

$$\sim C_3 \cdot D_4$$

$$D_3 \cdot D_4$$

$$D_3 \cdot \sim C_4$$

Cumplirán también con la condición que buscábamos; es decir, serán falsas sólo en el tercer y cuarto caso. (En ambos casos cualquiera de las conjunciones citadas tendrá uno de los términos falsos, y esto basta para que la conjunción lo sea). En otras palabras, que estas cuatro funciones tienen la misma matriz que las cuatro consideradas anteriormente.

Con esto, estamos ya en posesión de un medio para hacer funciones que correspondan a una matriz dada. Lo único que hemos de hacer es fijarnos en la matriz para ver en qué casos se quiere que la función pedida sea falsa o en qué casos se la quiere verdad. Si se quiere que la función sea falsa en los casos  $m$ -ésimo y  $n$ -ésimo, conectamos con una conjunción las conjunciones  $\sim C_m$  y  $\sim C_n$ ; o las disyunciones  $D_m$  y  $D_n$ ; o bien  $\sim C_m$  con  $D_n$ , o  $D_m$  con  $\sim C_n$ . Por otra parte, si se quiere que la función sea verdad en los casos  $m$ -ésimo y  $n$ -ésimo, conectamos con una disyunción

las conjunciones  $C_m$  y  $C_n$ ; o las disyunciones  $\sim D_m$  y  $\sim D_n$ ; o bien  $C_m$  con  $\sim D_n$ , o  $\sim D_m$  con  $C_n$ .

Si se quiere que la función sea falsa en tres casos, el m-ésimo, el n-ésimo y el j-ésimo, por ejemplo, conectamos con una conjunción las conjunciones  $\sim C_m, \sim C_n, \sim C_j$ . O las disyunciones  $D_m, D_n, D_j$ . O las debidas combinaciones entre ellas, por supuesto. El teorema donde se expresa la ley asociativa para la conjunción nos permite prescindir de tener que darle a una de las dos conjunciones un alcance mayor. (Lo mismo habría que decir para la disyunción a la que habríamos llegado si la condición requerida fuese que la función sea verdad en tales o cuales casos).

Pero, una función falsa en los tres casos citados tiene la misma matriz que una función verdad en el caso restante. Si éste fuera el i-ésimo, entonces la conjunción  $C_i$  y la disyunción  $\sim D_i$  cumplirán así mismo las condiciones que queríamos; es decir, ser falsa en el m-ésimo, n-ésimo y j-ésimo caso. Evidentemente, es más fácil y cómodo llegar a estas dos funciones que al más complicado considerado anteriormente. Qué hemos de escoger, si una función que sea falsa en tales casos, o si una función que sea verdad en tales otros, se decide atendiendo al criterio de mayor simplicidad; es decir, nos decidiremos por lo primero si en la matriz hay menos falsedades que verdades, y por lo segundo si hay menos verdades que falsedades; de este modo la función que resulta es menos compleja.

Trabajando con matrices de dos variables sólo, como hasta ahora hemos hecho, puede ensancharse el repertorio de funciones al cual llegar introduciendo la condicional. Sin embargo, el uso de ésta para el objetivo actual es limitado. Comoquiera que no hay una ley asociativa para la condicional, no podremos conectar con ella funciones. Lo que sí podemos conectar con ella son variables.

Es evidente que la condicional " $p \supset \sim q$ " es falsa sólo en el primer caso. Esta condicional la abreviamos " $\text{Con}_1$ ". (La condicional negada " $\sim(p \supset \sim q)$ ", o  $\sim\text{Con}_1$ , es verdad sólo en el primer caso). " $\sim p \supset \sim q$ " es falsa sólo en el segundo caso. (" $\sim(\sim p \supset \sim q)$ ", o  $\sim\text{Con}_2$ , es verdad sólo en el segundo caso). " $p \supset q$ " es falsa sólo en el tercer caso. (" $\sim(p \supset q)$ ", o  $\sim\text{Con}_3$ , es verdad sólo en el tercer caso). " $\sim p \supset q$ " es falsa sólo en el cuarto caso. (" $\sim(\sim p \supset q)$ ", o  $\sim\text{Con}_4$ , es verdad sólo en el cuarto caso).

Podríamos todavía ensanchar mucho más el repertorio de funciones al cual llegar si introduyésemos los signos de Sheffer. Lo que no podemos introducir es la bicondicional, pues ésta es verdad en más de un caso, y falsa en más de un caso.

Todo lo anterior ha sido hecho sobre una matriz sencilla de dos variables sólo. Podemos ampliar lo dicho, sin mayores dificultades, de modo que se aplique a una matriz con la cantidad de variables que queramos.

Consideremos el siguiente cuadro, donde se hace una matriz con n cantidad de variables, donde n es un número cualquiera.

En vez de "p", "q", "r", etc..., emplearemos, para mayor comodidad "p<sub>1</sub>", "p<sub>2</sub>", "p<sub>3</sub>", ... "p<sub>n</sub>".

		p <sub>1</sub>	p <sub>2</sub>	p <sub>3</sub>	p <sub>n</sub>	f(p <sub>1</sub> , p <sub>2</sub> , p <sub>3</sub> , ..., p <sub>n</sub> )
1	Caso	V	V	V	V	?
2	"	F	V	V	V	?
3	"	V	F	V	V	?
4	"	F	F	V	V	?
5	"	V	V	F	V	?
6	"	F	V	F	V	?
	2 <sup>n-2</sup> "	F	V	F	F	?
	2 <sup>n-1</sup> "	V	F	F	F	?
	2 <sup>n</sup> "	F	F	F	F	?

Hagamos una conjunción de todas las variables, afirmadas si están interpretadas como verdad y negadas si como falsas. La primera conjunción, atendiendo al primer caso, es "p<sub>1</sub> · p<sub>2</sub> · p<sub>3</sub> · ... · p<sub>n</sub>", que abreviamos "C<sub>1</sub>". Por la ley de asociatividad sabemos que ella es verdadera sólo en el primer caso. Por tanto  $\sim C_1$  es falsa sólo en el primer caso. Del mismo modo, la segunda conjunción, " $\sim p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n$ ", que es verdadera sólo en el segundo caso, la abreviamos "C<sub>2</sub>". Por tanto,  $\sim C_2$  es falsa sólo en el segundo caso. La tercera conjunción, "p<sub>1</sub> ·  $\sim p_2$  · p<sub>3</sub> · ... · p<sub>n</sub>", que es verdadera sólo en el tercer caso, la abreviamos "C<sub>3</sub>". Por tanto,  $\sim C_3$  es falsa sólo en el tercer caso. La 2<sup>n-1</sup> conjunción, "p<sub>1</sub> ·  $\sim p_2$  ·  $\sim p_3$  · ... ·  $\sim p_n$ ", que es verdadera sólo en el 2<sup>n-1</sup> caso, la abreviamos "C<sub>2<sup>n-1</sup></sub>". Por tanto,  $\sim C_{2<sup>n-1}}</sup>$  es falsa sólo en el 2<sup>n-1</sup> caso. La última conjunción, " $\sim p_1 \cdot \sim p_2 \cdot \sim p_3 \cdot \dots \cdot \sim p_n$ ", que es verdadera sólo en el último caso, el 2<sup>n</sup> caso, la abreviamos "C<sub>2<sup>n</sup></sub>". Por tanto,  $\sim C_{2<sup>n}}</sup>$  es



falsa sólo en el último caso.

Con la disyunción pasa lo correspondiente. Hagamos la disyunción de todas las variables, negadas si están interpretadas como verdad, y afirmadas si como falsas. La primera disyunción, atendiendo al primer caso, es " $\sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \sim p_3 \vee \dots \vee \sim p_n$ ", que abreviamos por " $D_1$ ". Por la ley de asociatividad sabemos que ella es falsa sólo en el primer caso. Por tanto,  $\sim D_1$  es verdad sólo en el primer caso. Del mismo modo, la segunda disyunción, " $p_1 \vee \sim p_2 \vee \sim p_3 \vee \dots \vee \sim p_n$ ", que es falsa sólo en el segundo caso, la abreviamos " $D_2$ ". Por tanto,  $\sim D_2$  es verdad sólo en el segundo caso. La tercera disyunción, " $\sim p_1 \vee p_2 \vee \sim p_3 \vee \dots \vee \sim p_n$ ", que es falsa sólo en el tercer caso, la abreviamos " $D_3$ ". Por tanto,  $\sim D_3$  es verdad sólo en el tercer caso. La  $2^{n-1}$  disyunción, " $\sim p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \dots \vee p_n$ ", que es falsa sólo en el  $2^{n-1}$  caso, la abreviamos " $D_{2^{n-1}}$ ". Por tanto,  $\sim D_{2^{n-1}}$  es verdad sólo en el  $2^{n-1}$  caso. La última disyunción, " $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \dots \vee p_n$ ", que es falsa sólo en el último caso, el  $2^n$  caso, la abreviamos " $D_{2^n}$ ". Por tanto,  $\sim D_{2^n}$  es verdad sólo en el último caso.

En general, si queremos una función falsa en el  $i$ -ésimo caso,  $j$ -ésimo caso y  $k$ -ésimo caso solamente, conectaremos con una conjunción las conjunciones  $\sim C_i, \sim C_k, \sim C_j$ ; o las disyunciones  $D_i, D_j, D_k$ ; o las correspondientes combinaciones. Es decir, resultan las siguientes funciones:

$$\sim C_i \cdot \sim C_j \cdot \sim C_k$$

$$\begin{aligned}
 &D_i \cdot D_j \cdot D_k \\
 &\sim C_i \cdot D_j \cdot \sim C_k \\
 &D_i \cdot \sim C_j \cdot D_k \\
 &\sim C_i \cdot \sim C_j \cdot D_k \\
 &\text{Etc...}
 \end{aligned}$$

Cualquiera de las cuales cumple los requisitos exigidos.

Si queremos una función verdad en el  $i$ -ésimo caso, el  $j$ -ésimo caso y el  $k$ -ésimo caso solamente, conectaremos con una disyunción las conjunciones  $C_i, C_j, C_k$ ; o las disyunciones  $\sim D_i, \sim D_j, \sim D_k$ ; o las correspondientes combinaciones. Es decir, resultan las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
 &C_i \vee C_j \vee C_k \\
 &\sim D_i \vee \sim D_j \vee \sim D_k \\
 &C_i \vee \sim D_j \vee C_k \\
 &\sim D_i \vee C_j \vee \sim D_k \\
 &C_i \vee C_j \vee \sim D_k \\
 &\text{Etc...}
 \end{aligned}$$

Cualquiera de las cuales cumple los requisitos exigidos.

Al hacer una función que responda a una matriz dada, nos decidiremos por la conjunción si en la matriz hay menos falsedades que verdades y por la disyunción si hay menos verdades que falsedades. De este modo la función que resulta es más sencilla, puesto que al tener menos condiciones que cumplir, tiene también menos funciones de partes o términos. El orden en que dispongamos estas partes es completamente indiferente, tanto si

se trata de una disyunción como de una conjunción.

A continuación damos varios ejemplos:

p	q	f(p,q)
V	V	F
F	V	V
V	F	V
F	F	F

La  $f(p,q)$  que tiene esa tabla o matriz es cualquiera de las siguientes:

$$\begin{array}{ll} \sim C_1 \cdot \sim C_4 & \sim(p \cdot q) \cdot \sim(\sim p \cdot \sim q) \\ D_1 \cdot D_4 & \sim p \vee \sim q \cdot p \vee q \\ \sim C_1 \cdot D_4 & \sim(p \cdot q) \cdot p \vee q \\ \text{Etc...} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} C_2 \vee C_3 & \sim p \cdot q \cdot \vee \cdot p \cdot \sim q \\ \sim D_2 \vee \sim D_3 & \sim(p \vee \sim q) \vee \sim(\sim p \vee q) \\ \sim D_2 \vee C_3 & \sim(p \vee \sim q) \cdot \vee \cdot p \cdot \sim q \\ \text{Etc...} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Con}_1 \cdot \text{Con}_4 & p \supset \sim q \cdot \sim p \supset q \\ \text{Con}_1 \cdot \sim C_4 & p \supset \sim q \cdot \sim(\sim p \cdot \sim q) \\ D_1 \cdot \text{Con}_4 & \sim p \vee \sim q \cdot \sim p \supset q \\ \text{Etc...} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \sim \text{Con}_2 \vee \sim \text{Con}_3 & \sim(\sim p \supset \sim q) \vee \sim(p \supset q) \\ \sim \text{Con}_2 \vee C_3 & \sim(\sim p \supset \sim q) \cdot \vee \cdot p \cdot \sim q \\ \sim D_2 \vee \sim \text{Con}_3 & \sim(p \vee \sim q) \vee \sim(p \supset q) \\ \text{Etc...} & \end{array}$$

p	q	r	f(p,q,r)
V	V	V	V
F	V	V	F
V	F	V	F
F	F	V	F
V	V	F	V
F	V	F	F
V	F	F	V
F	F	F	F

$$\sim C_2 \cdot \sim C_3 \cdot \sim C_4 \cdot \sim C_6 \cdot \sim C_8$$

$$\sim(\sim p \cdot q \cdot r) \cdot \sim(p \cdot \sim q \cdot r) \cdot \sim(\sim p \cdot \sim q \cdot r) \cdot$$

$$\cdot \sim(\sim p \cdot q \cdot \sim r) \cdot \sim(\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r)$$

$$C_1 \vee C_5 \vee C_7$$

$$p \cdot q \cdot r \cdot \vee \cdot p \cdot q \cdot \sim r \cdot \vee \cdot p \cdot \sim q \cdot \sim r$$

$$\sim D_1 \vee \sim D_5 \vee \sim D_7$$

$$\sim(\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \vee \sim(\sim p \vee \sim q \vee r) \vee \sim(\sim p \vee q \vee r)$$

$$D_2 \cdot D_3 \cdot D_4 \cdot D_6 \cdot D_8$$

$$p \vee \sim q \vee \sim r \cdot \sim p \vee q \vee \sim r \cdot p \vee q \vee \sim r \cdot p \vee \sim q \vee$$

$$v r \cdot p \vee q \vee r$$

$$\sim C_2 \cdot D_3 \cdot \sim C_4 \cdot \sim C_6 \cdot \sim C_8$$

$$\sim(\sim p \cdot q \cdot r) \cdot \sim p \vee q \vee \sim r \cdot \sim(\sim p \cdot \sim q \cdot r) \cdot$$

$$\cdot \sim(\sim p \cdot q \cdot \sim r) \cdot \sim(\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r)$$

Etc...

p	q	r	s	f(p,q,r,s)	g(p,q,r,s)	h(p,q,r,s)
V	V	V	V	V	F	F
F	V	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	F	V	V
V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V
V	V	V	F	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V	V
V	V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	V	V

f(p,q,r,s)

$C_1 \vee C_2 \vee C_3$

$p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot v \cdot \sim p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot v \cdot p \cdot \sim q \cdot r \cdot s$

$\sim D_1 \vee \sim D_2 \vee \sim D_3$

$\sim(\sim p \vee \sim q \vee \sim r \vee \sim s) \vee \sim(p \vee \sim q \vee \sim r \vee \sim s) \vee$

$v \sim(\sim p \vee q \vee \sim r \vee \sim s)$

g(p,q,r,s)

$\sim C_1 \cdot \sim C_2 \cdot \sim C_3$

$\sim(p \cdot q \cdot r \cdot s) \cdot \sim(\sim p \cdot q \cdot r \cdot s) \cdot \sim(p \cdot \sim q \cdot r \cdot s)$

$D_1 \cdot D_2 \cdot D_3$

$\sim p \vee \sim q \vee \sim r \vee \sim s \cdot p \vee \sim q \vee \sim r \vee \sim s \cdot \sim p \vee q \vee \sim r \vee \sim s$

h(p,q,r,s)

$\sim C_1 \cdot \sim C_{15}$

$\sim(p \cdot q \cdot r \cdot s) \cdot \sim(p \cdot \sim q \cdot \sim r \cdot \sim s)$

$$D_1 \cdot D_{15}$$

$$\sim p \vee \sim q \vee \sim r \vee \sim s \cdot \sim p \vee q \vee r \vee s$$

Si tomásemos las verdades como referencia, esta última función sería demasiado compleja; por ejemplo:

$$\begin{aligned} &\sim D_2 \vee \sim D_3 \vee \sim D_4 \vee \sim D_5 \vee \sim D_6 \vee \sim D_7 \vee \sim D_8 \vee \sim D_9 \vee \\ &\vee \sim D_{10} \vee \sim D_{11} \vee \sim D_{12} \vee \sim D_{13} \vee \sim D_{14} \vee \sim D_{16} \\ &\sim(p \vee \sim q \vee \sim r \vee \sim s) \vee \sim(\sim p \vee q \vee \sim r \vee \sim s) \vee \\ &\vee \sim(p \vee q \vee \sim r \vee \sim s) \vee \sim(\sim p \vee \sim q \vee r \vee \sim s) \vee \\ &\vee \sim(p \vee \sim q \vee r \vee \sim s) \vee \sim(\sim p \vee q \vee r \vee \sim s) \vee \\ &\vee \sim(p \vee q \vee r \vee \sim s) \vee \sim(\sim p \vee \sim q \vee \sim r \vee s) \vee \\ &\vee \sim(p \vee \sim q \vee \sim r \vee s) \vee \sim(\sim p \vee q \vee \sim r \vee s) \vee \\ &\vee \sim(p \vee q \vee \sim r \vee s) \vee \sim(\sim p \vee \sim q \vee r \vee s) \vee \\ &\vee \sim(p \vee \sim q \vee r \vee s) \vee \sim(p \vee q \vee r \vee s) \end{aligned}$$

### Ejercicio 7.-

a) Dada la siguiente tabla:

p	q	f(p,q)
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	F

Encontrar la función que le corresponde y que sea

- 1) Conjunción de conjunciones.
- 2) Conjunción de disyunciones.
- 3) Disyunción de conjunciones.
- 4) Disyunción de disyunciones.
- 5) Conjunción de condicionales.
- 6) Disyunción de condicionales.

b) Dada la siguiente tabla:

p	q	r	f(p,q,r)	g(p,q,r)	h(p,q,r)
V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	F	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V
F	F	F	V	F	V

Encontrar la forma más económica (ahorrar paréntesis negados es también una economía) de:

- 1)  $f(p,q,r)$
- 2)  $g(p,q,r)$
- 3)  $h(p,q,r)$

## L A S F O R M A S N O R M A L E S . -

Antes de entrar en este capítulo es indispensable conocer la ley distributiva del producto lógico con respecto a la suma lógica, y de la suma lógica con respecto al producto lógico.

### La Ley Distributiva.-

En matemática hay una ley distributiva del producto respecto a la suma:

$$\begin{aligned} a(b + c) &= ab + ac \\ (a + b)(c + d) &= ac + ad + bc + bd \end{aligned}$$

Paralelamente, en lógica:

$$\begin{aligned} p \cdot q \vee r &:\equiv: p \cdot q \cdot v \cdot p \cdot r \\ p \vee q \cdot r \vee s &:\equiv: p \cdot r \cdot v \cdot p \cdot s \cdot v \cdot q \cdot r \cdot v \cdot \\ &\cdot v \cdot q \cdot s \end{aligned}$$

Es decir, que podemos convertir cualquier conjunción de disyunciones en disyunción de conjunciones. (Está claro que " $p \cdot \equiv \cdot \equiv \cdot p \vee p^n$ ").

Tenemos además, en lógica, una ley distributiva de la suma respecto al producto, lo cual no sucede en matemática:

$$p \cdot v \cdot q \cdot r :\equiv: p \vee q \cdot p \vee r$$

$$p \cdot q \cdot v \cdot r \cdot s \equiv p \cdot v \cdot r \cdot p \cdot v \cdot s \cdot q \cdot v \cdot r \cdot q \cdot v \cdot s$$

Es decir, que podemos igualmente convertir cualquier disyunción de conjunciones en conjunción de disyunciones. (También está claro que " $p \equiv p \cdot p$ ").

La mecánica para aplicar la ley distributiva es bien sencilla. Para distribuir un producto respecto a una suma, conéctese con conjunción cada disyunto de cada factor con cada disyunto del otro factor, conectando estos productos con disyunciones. Para distribuir una suma respecto a un producto, conéctese con disyunción cada factor de cada disyunto con cada factor del otro disyunto, conectando estas disyunciones con conjunciones.

La mecánica anterior puede ser simplificada y generalizada si llamamos parte a los factores y disyunciones (cuando estos tienen el alcance mayor) y sub-partes a los términos de las partes. La regla entonces se expresa así: Conéctese con el operador principal (el de mayor alcance) cada sub-parte de cada parte con cada sub-parte de la otra parte, conectando estas partes resultantes con el operador secundario (el de menor alcance).

Por ejemplo, sea la función:

$$\underline{p \cdot v \cdot q \cdot v \cdot r} \cdot \underline{r \cdot v \cdot s}$$

Las partes son " $p \cdot v \cdot q \cdot v \cdot r$ " y " $r \cdot v \cdot s$ ". Y las subpartes, " $p$ ", " $q$ ", " $r$ ". Entonces, de acuerdo con la regla:

$$p \cdot r \cdot v \cdot p \cdot s \cdot v \cdot q \cdot r \cdot v \cdot q \cdot s \cdot v \cdot r \cdot r \cdot v$$

.v. r . s

Cuando son más de dos las partes, es conveniente distribuir dos partes primero y después el resultado con la otra siguiente, etc... Por ejemplo:

p . q . r .v. r . s .v. t . p . q

Distribuyendo primero las dos partes subrayadas y subrayando las partes y subpartes que resultan:

p v r . p v s . q v r . q v s .v. t . p . q

Distribuyendo ahora las dos partes subrayadas, llegamos al resultado final:

p v r v t . p v r v p . p v r v q . p v s v t .  
 . p v s v p . p v s v q . q v r v t . q v r v p .  
 . q v r v q . q v s v t . q v s v p . q v s v q

(El segundo, quinto, noveno y décimo segundo término-factor pueden simplificarse suprimiendo una de las variables repetidas).

### Las Formas Normales.-

Decimos que una función está expresada en forma normal cuando aparece expresada

- 1) o como una disyunción de conjunciones,
- 2) o como una conjunción de disyunciones,

sin que en ninguno de los dos casos aparezca un signo negado.

(Es decir, que no haya paréntesis).

Le llamamos a la primera forma normal disyuntiva (F. N. D.), y forma normal conjuntiva (F. N. C.) a la segunda.

Para llevar una función a su forma normal disyuntiva o conjuntiva, se aplican las transformaciones convenientes y, en caso necesario, la ley distributiva.

Conviene recordar, además, que en una disyunción podemos eliminar los términos que conocemos como falsos, y que en una conjunción, los que conocemos como verdaderos. La razón de ello, expuesta en el capítulo relativo al método de Quine, es que el hacerlo así no altera el valor veritativo de la función en cuestión. Ahora bien, expresiones del tipo de " $p \cdot \sim p$ ", o " $p \cdot \sim p \cdot q \cdot \dots$ " son siempre falsas, (son las negaciones del teorema " $\sim(p \cdot \sim p)$ ", y podemos por tanto eliminarlas de las disyunciones. Por otra parte, expresiones del tipo de " $p \vee \sim p$ ", o " $p \vee \sim p \vee q \vee \dots$ " son siempre verdaderas, (es un teorema), y podemos por tanto eliminarlas de las conjunciones.

#### La Forma Normal Disyuntiva.-

Por ejemplo, sea la función:

$$p \vee q \cdot \supset \cdot q \vee p$$

Transformamos la condicional en disyunción:

$$\sim(p \vee q) \cdot \vee \cdot q \vee p$$

Eliminamos los paréntesis transformando la disyunción negada en conjunción:

$$\sim p \cdot \sim q \cdot \vee \cdot q \vee p$$

Que puede también escribirse, según la ley asociativa comentada anteriormente:

$$\sim p \cdot \sim q \cdot \vee \cdot q \cdot \vee \cdot p$$

Ya está en su forma normal disyuntiva, puesto que, por un principio ligeramente comentado ya, y que se llama de idempotencia, lo anterior puede expresarse:

$$\sim p \cdot \sim q \cdot v \cdot q \cdot q \cdot v \cdot p \cdot p$$

Es decir, una disyunción de conjunciones en la que no aparece ningún operador negado.

Otro ejemplo. Sea la función:

$$p \supset q \cdot q \supset p$$

Transformamos las condicionales en disyunciones:

$$\sim p \vee q \cdot \sim q \vee p$$

Aplicamos la ley distributiva para convertir esta conjunción de disyunciones en disyunción de conjunciones:

$$\sim p \cdot \sim q \cdot v \cdot \sim p \cdot p \cdot v \cdot q \cdot \sim q \cdot v \cdot q \cdot p$$

Eliminamos el disyunto segundo y tercero porque son del tipo de "p . ~p", y queda:

$$\sim p \cdot \sim q \cdot v \cdot q \cdot p$$

Que puede también escribirse, por una doble aplicación de la propiedad conmutativa:

$$p \cdot q \cdot v \cdot \sim p \cdot \sim q$$

Es decir, se trata de una expresión verdadera cuando p y q son verdad o cuando p y q son falsos, y éste es exactamente el caso de la bicondicional. La forma normal disyuntiva, pues, es especialmente interesante porque expresa con claridad y de un golpe de ojo las condiciones en las que una función es verdad.

Primera Aplicación de la F. N. D. .-

Es evidente que el valor veritativo de la función expresada en su forma normal disyuntiva (o conjuntiva) es el mismo para cada asignación de valores a sus variables que el de la función, pues todas las transformaciones que hacemos son legítimas. En consecuencia, si la función original es una contradicción formal, una función que llamamos contraválida porque resulta falsa para toda asignación de valores, entonces llevada a su forma normal disyuntiva cada uno de sus términos ha de ser una conjunción del tipo de " $p \cdot \sim p$ ", porque el único caso en que una disyunción es siempre falsa es cuando sus términos son siempre falsos. E inversamente:

SI LLEVAMOS UNA FUNCION A SU FORMA NORMAL DISYUNTIVA, Y TODOS SUS TERMINOS SON ELIMINABLES, ES DECIR, DEL TIPO DE " $p \cdot \sim p$ ", LA FUNCION ES CONTRAVALIDA.

La F. N. D. nos permite saber, pues, cuándo una función es siempre falsa. Si resulta que no todos sus términos son eliminables, quiere decir que hay por lo menos una posible asignación de valores a sus variables bajo la cual la función es verdadera. Dicho de otro modo:

SI LLEVAMOS UNA FUNCION A SU FORMA NORMAL DISYUNTIVA, Y NO TODOS SUS TERMINOS SON ELIMINABLES, LA FUNCION ES CONSISTENTE (no contradictoria).

Tal fue el caso del ejemplo anterior, que era una función consistente.

Otro ejemplo. Sea la función:

$$p \supset q \cdot q \supset r \cdot p \cdot \sim r$$

$$\sim p \vee q \cdot \sim q \vee r \cdot p \cdot \sim r$$

Aplicamos la ley distributiva:

$$\begin{aligned} & \sim p \cdot \sim q \cdot p \cdot \sim r \cdot \vee \cdot \sim p \cdot r \cdot p \cdot \sim r \cdot \vee \cdot q \cdot \sim q \cdot \\ & \cdot p \cdot \sim r \cdot \vee \cdot q \cdot r \cdot p \cdot \sim r \end{aligned}$$

Todas las conjunciones son eliminables, luego el esquema es contraválido (inconsistente).

### Segunda Aplicación de la F. N. D. .-

Se conocen tres diferentes clases de razonamientos:

- 1) El razonamiento perfecto
- 2) El razonamiento incompleto
- 3) El razonamiento contradictorio

El razonamiento perfecto es aquel que, expresado simbólicamente, es un teorema o tautología; es decir, es un argumento verdadero independientemente de la verdad o falsedad de sus componentes: independientemente tanto del valor significativo como del veritativo de las variables de la función. Por ejemplo:

Si el agua hierve si le pones al fuego, entonces no es el caso que le pones al fuego y que no hierve.

Porque expresando simbólicamente el anterior argumento, resulta:

$$p \supset q \cdot \supset \cdot \sim (p \cdot \sim q)$$

Que es una tautología o función verdadera en todos los casos, como se puede comprobar fácilmente haciendo su tabla.

El razonamiento incompleto es aquel que sólo para alguna interpretación es verdadero. Expresado simbólicamente, el ar-

gumento incompleto da una función que es verdad en por lo menos un caso y falso en por lo menos un caso. Por ejemplo:

Pedro estudia y María come. ( $p \cdot q$ )

Porque hay un caso en el que es verdadero, (cuando es verdad que Pedro estudia y es también verdad que María come), y tres en el que es falso.

El razonamiento contradictorio es aquel que da una función contraválida, es decir, falsa bajo cualquier interpretación. Por ejemplo:

Pedro come y no come. ( $p \cdot \sim p$ )

La F. N. D. nos permite transformar, con una operación bien simple, cualquier argumento incompleto o contradictorio en un argumento perfecto. Lo único que es preciso para ello es traducir a la simbología lógica el argumento que se quiere expresar como perfecto, llevarlo luego a su F. N. D. y, por último, expresar el argumento como el consecuente de una condicional que tiene como antecedente cualquiera de los términos (conjunciones) de la disyunción normal.

Por ejemplo, sea el siguiente argumento:

Iré a la Universidad si, y sólo si me prestan los libros.

Lo traducimos a simbología lógica:

$p \equiv q$

Como se trata de una función sencilla, sabemos (aunque podemos prescindir de esa noticia, por supuesto), que este argumento tiene dos posibilidades de ser falso; a saber, cuando es verdad

que voy a la Universidad y no me prestan los libros, y cuando es falso que voy a la Universidad pero verdad que me prestan los libros. Se trata, pues, de un argumento incompleto. Queremos expresarlo de tal manera que no haya ninguna posibilidad de falsedad, es decir, como argumento perfecto. Sabemos que la F. N. D. de la función que lo traduce es precisamente (se la puso de ejemplo más arriba):

$$\sim p \cdot \sim q \cdot v \cdot q \cdot p$$

Hacemos una condicional con el argumento (bien en su forma original o en su forma normal) de consecuente y cualquiera de los términos de la disyunción normal como antecedente:

$$\sim p \cdot \sim q \cdot \supset \cdot p \equiv q$$

O, también:

$$p \cdot q \cdot \supset \cdot p \equiv q$$

Es decir, que el argumento:

Si no voy a la Universidad y no me prestan los libros, entonces voy a la Universidad si, y sólo si me prestan los libros.

Como también:

Si me prestan los libros y voy a la Universidad, entonces voy a la Universidad si, y sólo si me prestan los libros.

Son razonamientos perfectos sin ninguna posibilidad de expresar una falsedad.

La razón de esto es bien sencilla: Bajo cualquier interpretación, el argumento es verdad o falso. Ahora bien, anteponiéndole como antecedente uno de los términos de ese argumento expresado

en su F. N. D., no hay manera de hacer que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso. En todos los casos en que es falso el consecuente (todos los términos de la disyunción son falsos), el antecedente, (uno de los términos), es así mismo falso. Es decir, que hay aquí una implicación.

Por supuesto que uno de estos términos puede ser " $p \cdot \sim p$ ", porque aunque no aparezca en la F. N. D., siempre es posible añadirlo (del mismo modo como podemos eliminarlo) sin que se altere el valor veritativo de la función.

#### La Forma Normal Conjuntiva.-

Para llevar una función a su F. N. C. el procedimiento es igual al ya descrito de la F. N. D. Por otra parte, está claro que para pasar de la F. N. D. a la F. N. C., e inversamente, lo único que hace falta es aplicar la ley distributiva.

Por ejemplo:

$$p \equiv q$$

$$p \supset q \cdot q \supset p$$

$$\sim p \vee q \cdot \sim q \vee p$$

Aquí está ya en su F. N. C.

#### Primera Aplicación de la F. N. C. .-

Según se ha dicho ya, en una conjunción podemos eliminar los términos que conocemos como verdad, ya que el hacerlo así no altera el valor veritativo de la función en cuestión. Según se ha dicho también, expresiones del tipo de " $p \vee \sim p$ ", o " $p \vee \sim p \vee q \vee \dots$ "

son siempre verdaderas y podemos por lo mismo eliminarlas.

Ahora bien, está claro que la función no cambia de matriz al ser llevada a su F. N. C. En consecuencia, si la función en cuestión es una tautología, una función verdadera para todas las interpretaciones posibles de sus variables, entonces llevada a su F. N. C. ha de tener, necesariamente, todos sus términos (disyunciones) del tipo de " $p \vee \sim p$ ". E inversamente:

SI LLEVAMOS UNA FUNCION A SU FORMA NORMAL CONJUNTIVA, Y TODOS SUS TERMINOS SON ELIMINABLES, ES DECIR, DEL TIPO DE " $p \vee \sim p$ ", LA FUNCION ES UNA TAUTOLOGIA.

Si no todos sus términos son eliminables, es señal de que la función es falsa en por lo menos un caso.

Lo anterior puede acoplarse con la primera aplicación de la F. N. D. de modo que podamos contar con otra técnica para decidir (por lo menos parcialmente) una función; es decir, saber si es siempre falsa o contraválida, siempre verdadera o tautológica, o falsa en por lo menos un caso, o verdadera en por lo menos un caso (consistente). La siguiente:

Si llevamos una función a su F. N. D., pueden suceder dos cosas:

- a) Que todos sus términos sean eliminables, en cuyo caso sabemos que la función es contraválida y no necesitamos seguir adelante.
- b) Que no todos sus términos sean eliminables, en cuyo caso sabemos que la función es, por lo

menos, consistente. Si queremos saber si además de consistente es tautológica, no hay más que llevarla, mediante la aplicación de la ley distributiva, a su F. N. C. Si en esta forma son eliminables todos sus términos, la función es una tautología. Si no son eliminables todos sus términos, se trata de una función falsa en algún caso.

Por otra parte, si llevamos una función a su F. N. C., pueden suceder dos cosas:

- a) Que todos sus términos sean eliminables, en cuyo caso sabemos que la función es tautológica y no necesitamos seguir adelante.
- b) Que no todos sus términos sean eliminables, en cuyo caso sabemos que la función es falsa en por lo menos un caso. Si queremos saber si además de ser falsa en por lo menos un caso, es una función contraválida, falsa en todos los casos, no hay más que llevarla, mediante la aplicación de la ley distributiva, a su F. N. D. Si en esta forma son eliminables todos sus términos, la función es contraválida. Si no son eliminables todos sus términos, se trata de una función verdadera en algún caso, consistente.

Podemos resumir lo anterior en el siguiente cuadro:

	Todos sus términos son eliminables	No todos sus términos son eliminables
F. N. C.	Tautológica	Alguna vez falsa
F. N. D.	Contraválida	Alguna vez verdad

### Segunda Aplicación de la F. N. C. .-

También con la F. N. C. pueden hacerse razonamientos perfectos de los incompletos y contradictorios. Para ello, basta tomar al argumento en cuestión como antecedente de cualquiera de los términos (disyunciones) de su F. N. C. La razón de ello es bien sencilla: No hay manera de que la función sea verdad y el término elegido de su F. N. C. falso. Cuando la función es verdad, cada uno de los términos de la conjunción ha de ser verdad también. Huelga decir que toda función implica " $p \vee \sim p$ ", pues aunque no aparezca en su F. N. C. puede añadirsele, (lo mismo que quitársele).

Por ejemplo, sea el argumento:

Si voy a la Universidad si, y sólo si me prestan los libros, entonces voy a la Universidad y estudio.

Que representamos simbólicamente:

$$p \equiv q \cdot \supset \cdot p \cdot r$$

Para convertirlo en un argumento perfecto lo llevamos a su F. N. C. Nos deshacemos primero del signo de la bicondicional:

$$p \supset q \cdot q \supset p \cdot \supset \cdot p \cdot r$$

Transformamos en conjunción la condicional principal:

$$\sim [p \supset q \cdot q \supset p \cdot \sim (p \cdot r)]$$

Y ahora las dos condicionales restantes:

$$\sim[\sim(p \cdot \sim q) \cdot \sim(q \cdot \sim p) \cdot \sim(p \cdot r)]$$

Nos deshacemos de los paréntesis:

$$p \cdot \sim q \cdot v \cdot q \cdot \sim p \cdot v \cdot p \cdot r$$

Aplicamos ahora la ley distributiva:

$$\begin{aligned} p \cdot v \cdot q \cdot v \cdot p \cdot p \cdot v \cdot q \cdot v \cdot r \cdot p \cdot v \cdot \sim p \cdot v \cdot p \cdot p \cdot v \\ v \cdot \sim p \cdot v \cdot r \cdot \sim q \cdot v \cdot q \cdot v \cdot p \cdot \sim q \cdot v \cdot q \cdot v \cdot r \cdot \sim q \cdot v \\ v \cdot \sim p \cdot v \cdot p \cdot \sim q \cdot v \cdot \sim p \cdot v \cdot r \end{aligned}$$

Eliminamos las disyunciones 3, 4, 5, 6, 7, y en la primera, una de las variables repetida:

$$p \cdot v \cdot q \cdot p \cdot v \cdot q \cdot v \cdot r \cdot \sim p \cdot v \cdot \sim q \cdot v \cdot r$$

Ahí está ya en su F. N. C. Pues bien, los razonamientos o argumentos siguientes son perfectos:

$$\begin{aligned} p \equiv q \cdot \supset \cdot p \cdot r : \supset : p \cdot v \cdot q \\ p \equiv q \cdot \supset \cdot p \cdot r : \supset : p \cdot v \cdot q \cdot v \cdot r \\ p \equiv q \cdot \supset \cdot p \cdot r : \supset : \sim p \cdot v \cdot \sim q \cdot v \cdot r \\ p \equiv q \cdot \supset \cdot p \cdot r : \supset : p \cdot v \cdot q \cdot p \cdot v \cdot q \cdot v \cdot r \\ \text{Etc...} \end{aligned}$$

Asignándoles a las variables sus valores significativos, la primera de estas implicaciones, por ejemplo, se interpreta:

Si voy a la Universidad si, y sólo si me prestan los libros, entonces voy a la Universidad y estudio. Por tanto, voy a la Universidad o me prestan los libros.

Resumimos la segunda aplicación de las formas normales disyuntiva y conjuntiva:

UNA FUNCION ES IMPLICADA POR CUALQUIER TERMINO DE SU F. N. D. E IMPLICA CUALQUIER TERMINO DE SU F. N. C.

Ejercicio 8.-

Decida, por medio de las formas normales, las siguientes expresiones:

- 1)  $p \supset q \cdot p \cdot \supset \cdot q$
- 2)  $\sim(p \supset q \cdot \sim q \cdot \supset \cdot \sim p)$
- 3)  $p \vee q$
- 4)  $p \cdot \sim q$

Las Formas Normales Principales.-

Si en cada término de una F. N. D. o de una F. N. C. aparecen todas las variables de la función de cuya forma normal se trata, decimos que esta función está en su forma normal disyuntiva principal (F. N. D. P.) o en su forma normal conjuntiva principal (F. N. C. P.) respectivamente.

Para llevar una función a cualquiera de sus dos formas normales principales el procedimiento es el mismo que el ya descrito para llevarle a su F. N. D. y F. N. C.

Si en su F. N. D. no tienen todos sus términos todas las variables de la función original, no tenemos más que añadirle bajo la forma de " $p \vee \sim p$ " la variable o variables que hagan falta. Comoquiera que esa expresión es siempre verdadera, no altera el valor de la conjunción. Después, aplicamos la ley distributiva y le tendremos ya en su F. N. D. P.

Si en su F. N. C. no tienen todos sus términos todas las variables, y queremos llevarla a su F. N. C. P., no tenemos más

que añadirle a cada disyunción la variable o variables que falten bajo la forma de " $p \cdot \sim p$ ". Como esta expresión es siempre falsa, podemos añadirsele a una disyunción sin que se altere su valor veritativo. Luego, aplicamos la ley distributiva y el resultado será la función en su F. N. C. P.

Por ejemplo, sea la función:

$$p \vee q \cdot \supset \cdot r$$

$$\sim(p \vee q) \cdot v \cdot r$$

$$\sim p \cdot \sim q \cdot v \cdot r$$

$$\sim p \vee r \cdot \sim q \vee r$$

Ahí está ya en su F. N. C. Para llevarla a su F. N. C. P. tenemos que añadirle " $q \cdot \sim q$ " al primer término de la conjunción y " $p \cdot \sim p$ " al segundo:

$$q \cdot \sim q \cdot v \cdot \sim p \cdot v \cdot r : p \cdot \sim p \cdot v \cdot \sim q \cdot v \cdot r$$

Y aplicar la ley distributiva:

$$q \vee \sim p \vee r \cdot \sim q \vee \sim p \vee r \cdot p \vee \sim q \vee r \cdot \sim p \vee \sim q \vee r$$

Ahí está ya en su F. N. C. P.

Otro ejemplo. Tomemos la misma función pero llevándola esta vez a su F. N. D. P.:

$$p \vee q \cdot \supset \cdot r$$

$$\sim(p \vee q) \vee r$$

$$\sim p \cdot \sim q \cdot v \cdot r$$

Ahí la tenemos en su F. N. D. Para llevarla a su F. N. D. P. tenemos que añadirle " $r \vee \sim r$ " al primer término de la disyunción y " $p \vee \sim p$ " y " $q \vee \sim q$ " al segundo, aplicando después, por separado, la ley distributiva:

$$\begin{aligned}
 & r \vee \sim r \cdot \sim p \cdot \sim q \cdot v \cdot p \vee \sim p \cdot q \vee \sim q \cdot r \\
 & r \cdot \sim p \cdot \sim q \cdot v \cdot \sim r \cdot \sim p \cdot \sim q \cdot v \cdot p \cdot q \cdot r \cdot v \cdot \\
 & \cdot v \cdot p \cdot \sim q \cdot r \cdot v \cdot \sim p \cdot q \cdot r \cdot v \cdot \sim p \cdot \sim q \cdot r
 \end{aligned}$$

Eliminamos el último término de la disyunción porque está repetido (con el primero) y queda:

$$\begin{aligned}
 & r \cdot \sim p \cdot \sim q \cdot v \cdot \sim r \cdot \sim p \cdot \sim q \cdot v \cdot p \cdot q \cdot r \cdot v \cdot \\
 & \cdot v \cdot p \cdot \sim q \cdot r \cdot v \cdot \sim p \cdot q \cdot r
 \end{aligned}$$

Ahí está ya en su F. N. D. P.

Para las dos formas normales principales tenemos dos aplicaciones análogas, pero más completas, que las comentadas más arriba de las formas normales.

#### Primera Aplicación de las Formas Normales Principales.-

Llevada una función de  $n$  variables (y que tiene por tanto  $2^n$  casos) a su F. N. D. P., está claro que cada término de ella expondrá un caso en que es verdad la función. De manera que si el desarrollo o expansión de la función a su F. N. D. P. tiene  $2^n$  términos, la función es tautológica, pues tiene tantos casos verdaderos como posibles. De otro modo:

SI LA F. N. D. P. DE UNA FUNCION DE  $n$  VARIABLES  
TIENE  $2^n$  TERMINOS, LA FUNCION ES TAUTOLOGICA.

Por ejemplo, sea la función:

$$\begin{aligned}
 & p \vee q \cdot \supset \cdot q \vee p \\
 & \sim(p \vee q) \vee q \vee p \\
 & \sim p \cdot \sim q \cdot v \cdot q \cdot v \cdot p \\
 & \sim p \cdot \sim q \cdot v \cdot q \cdot p \vee \sim p \cdot v \cdot p \cdot q \vee \sim q \\
 & \sim p \cdot \sim q \cdot v \cdot q \cdot p \cdot v \cdot q \cdot \sim p \cdot v \cdot p \cdot q \cdot v \cdot p \cdot \sim q
 \end{aligned}$$

Eliminamos el penúltimo término que está repetido (con el segundo) y queda:

$$\sim p \cdot \sim q \cdot v \cdot q \cdot p \cdot v \cdot q \cdot \sim p \cdot v \cdot p \cdot \sim q$$

Es decir, cuatro términos. Como la función tiene dos variables, y  $2^2 = 4$ , se trata de una tautología.

Por otra parte, si llevamos una función de  $n$  variables (y que tiene por tanto  $2^n$  casos) a su F. N. C. P., está claro que cada término (disyunciones) será falso sólo en un caso, y que si hay tantos términos como casos, la función tendrá que ser necesariamente contraválida. Dicho de otro modo:

SI LA F. N. C. P. DE UNA FUNCION DE  $n$  VARIABLES TIENE  $2^n$  TERMINOS, LA FUNCION ES CONTRAVALIDA.

Por ejemplo, sea la función:

$$\sim(p \vee q \cdot \supset \cdot q \vee p)$$

$$p \vee q \cdot \sim(q \vee p)$$

$$p \vee q \cdot \sim q \cdot \sim p$$

$$p \vee q : \sim q \cdot v \cdot p \cdot \sim p : \sim p \cdot v \cdot q \cdot \sim q$$

$$p \vee q \cdot \sim q \vee p \cdot \sim q \vee \sim p \cdot \sim p \vee q \cdot \sim p \vee \sim q$$

Eliminamos el último término que está repetido (con el tercero) y queda:

$$p \vee q \cdot \sim q \vee p \cdot \sim q \vee \sim p \cdot \sim p \vee q$$

Es decir, cuatro términos. Luego la función es contraválida.

### Segunda Aplicación de las Formas Normales Principales.-

Tenemos una aplicación notablemente importante de las formas normales principales, que se deriva de la segunda aplicación de las formas normales disyuntiva y conjuntiva tratada más arri-

ba.

Sabemos, por el análisis combinatorio, que una función de  $n$  variables tiene exactamente  $2^n$  casos posibles para ser verdad o falso. Y en consecuencia, que hay exactamente  $2^{2^n}$  funciones posibles diferentes (diferentes en el sentido de que tienen distintas tablas o matrices) que pueden hacerse donde intervienen esas  $n$  variables.

De esas  $2^{2^n}$  funciones posibles algunas implican una función determinada con  $n$  variables y algunas son implicadas por ella. Dicho de otro modo, una función con  $n$  variables implica ciertas funciones con esas  $n$  variables y es implicadas por ciertas funciones con esas  $n$  variables. Pues bien, las formas normales principales nos permite el medio de saber exactamente cuántas, y exactamente cuáles son esas funciones.

UNA FUNCION CON  $n$  VARIABLES IMPLICA, DE TODAS LAS FUNCIONES DIFERENTES -en el sentido aclarado- CON ESAS  $n$  VARIABLES, TODAS Y SOLO LAS QUE APARECEN COMO TERMINOS DE SU F. N. C. P. O COMBINACION DE ESTOS TERMINOS DE CUALQUIER NUMERO A LA VEZ.

Que una función implica cualquier término de su F. N. C. P. o combinación de ellos se demuestra de la siguiente manera:

No hay manera de hacer que el antecedente (conjunciones) sea verdad y el consecuente falso. Porque los únicos casos en que el antecedente es verdad es cuando lo son todos sus términos, dentro de los cuales está incluido el consecuente.

Que una función implica únicamente (de las funciones posibles con las mismas variables) las que son términos de su F. N.

C. P., o combinación de ellos, se demuestra de la siguiente manera:

Si hubiera una más, esta función tendría que ser verdad siempre que lo fuera la F. N. C. P. Pero esto no puede ser, porque la F. N. C. P. es verdad únicamente cuando lo son todos sus términos, dentro de los cuales no está incluida (por hipótesis) la función. Luego, no le hay.

Por otra parte:

UNA FUNCION CON  $n$  VARIABLES ES IMPLICADA, DE TODAS LAS FUNCIONES POSIBLES DIFERENTES -en el sentido aclarado- CON ESAS  $n$  VARIABLES, POR TODAS Y SOLO POR LAS QUE APARECEN COMO TERMINOS DE SU F. N. D. P. O COMBINACION DE ESTOS TERMINOS TOMADOS DE CUALQUIER NUMERO A LA VEZ.

Que una función es implicada por cualquier término de su F. N. D. P. o combinación de ellos se demuestra de la siguiente manera:

No hay manera de hacer el antecedente verdadero y el consecuente falso. Porque si el antecedente es verdadero, lo es también automáticamente el consecuente, ya que siendo un término de él, si él es verdad, todo lo es, porque se trata de una disyunción.

Que una función es implicada únicamente por los términos de su F. N. D. P. o combinación de ellos, se demuestra de la siguiente manera:

Si hubiera una más, esta función tendría que ser falsa cuando es falsa la F. N. D. P. Pero eso no puede ser, porque la F. N. D. P. es falsa cuando son falsos todos sus términos, dentro de los cuales no está incluida (por hipótesis) la fun-

ción. En todos los demás casos es verdad. Luego, no le hay.

El análisis combinatorio nos dice que  $m$  elementos pueden combinarse, tomando los elementos de cualquier número a la vez,  $2^m - 1$  veces. Esta fórmula, pues, es aplicable para saber exactamente cuántas consecuencias y cuántos antecedentes tiene una función cualquiera. En este caso,  $m$  es el número de términos de la F. N. C. P. o la F. N. D. P.

Por ejemplo, supongamos que nos dan estas dos premisas:

Si Juan no vota, Pedro tampoco vota.  
Pero si Juan vota, vota también Enrique.

Queremos saber qué se puede inferir o deducir de ellas, es decir, qué es lo que implican estas premisas. En otras palabras, cuáles son los términos de su F. N. C. P. y cuántos hay de ellos y combinaciones de ellos.

Lo representamos simbólicamente y lo llevamos a su F. N. C. P.:

$$\sim p \supset \sim q \cdot p \supset r$$

$$p \vee \sim q \cdot \sim p \vee r$$

$$r \cdot \sim r \cdot v \cdot p \cdot v \cdot \sim q : q \cdot \sim q \cdot v \cdot \sim p \cdot v \cdot r$$

$$r \vee p \vee \sim q \cdot \sim r \vee p \vee \sim q \cdot q \vee \sim p \vee r \cdot \sim q \vee \sim p \vee r$$

Las consecuencias son, pues,  $2^4 - 1 = 15$ . Una de ellas es el primer término con el último:

$$r \vee p \vee \sim q \cdot \sim q \vee \sim p \vee r$$

Factorizando por  $r \vee \sim q$ :

$$r \cdot v \cdot \sim q \cdot v \cdot p \cdot \sim p$$

Pero " $p \cdot \sim p$ " puede eliminarse, quedando:

$$r \vee \sim q$$

Que podemos conmutar y transformar en la condicional:

$$q \supset r$$

Luego:

$$\sim p \supset \sim q \cdot p \supset r \cdot \supset \cdot q \supset r$$

Es decir, que de esas dos premisas se infiere que si Pedro vota, Enrique vota.

Supongamos ahora que queremos saber qué implica a la proposición:

Pedro vota si, y sólo si Juan no vota.

Es decir, queremos demostrar esa proposición. La representamos simbólicamente y la llevamos a su F. N. D. P.:

$$p \equiv \sim q$$

$$p \supset \sim q \cdot \sim q \supset p$$

$$\sim p \vee \sim q \cdot q \vee p$$

$$\sim p \cdot q \cdot \vee \cdot \sim p \cdot p \cdot \vee \cdot \sim q \cdot q \cdot \vee \cdot \sim q \cdot p$$

$$\sim p \cdot q \cdot \vee \cdot \sim q \cdot p$$

Es decir, que sólo hay  $2^2 - 1 = 3$  premisas que la implican y a partir de las cuales puede demostrarse. Por ejemplo, la primera:

$$\sim p \cdot q \cdot \supset \cdot p \equiv \sim q$$

Que dice, interpretado:

Si Pedro no vota y Juan sí, entonces Pedro vota si, y sólo si Juan no vota.

Es decir, que para demostrar un argumento cualquiera, se lo lleva a su F. N. D. P. y vemos cuál de sus términos o combinación

de ellos nos permite la experiencia, o un raciocinio previo, asertar. Encontrado esto, la demostración se desarrolla así:

Si "ese término", entonces "lo que se quiere demostrar".  
Es verdad "ese término".  
Luego es verdad "lo que se quiere demostrar".

Como un ejemplo último veamos de nuevo la proposición:

Un cuerpo está en reposo o en velocidad constante si, y sólo si está en equilibrio.

La expresamos simbólicamente y la llevamos a su F. N. C. P.:

$$p \vee q \equiv r$$

$$p \vee q \supset r : r \supset p \vee q$$

$$\sim(p \vee q) \vee r : \sim r \vee p \vee q$$

$$\sim p \cdot \sim q \cdot v \cdot r : \sim r \vee p \vee q$$

$$\sim p \vee r \cdot \sim q \vee r \cdot \sim r \vee p \vee q$$

$$q \cdot \sim q \cdot v \cdot \sim p \cdot v \cdot r : p \cdot \sim p \cdot v \cdot \sim q \cdot v \cdot r :$$

$$: \sim r \vee p \vee q$$

$$q \vee \sim p \vee r \cdot \sim q \vee \sim p \vee r \cdot p \vee \sim q \vee r \cdot \sim p \vee$$

$$v \sim q \vee r \cdot \sim r \vee p \vee q$$

$$q \vee \sim p \vee r \cdot \sim q \vee \sim p \vee r \cdot p \vee \sim q \vee r \cdot \sim r \vee p \vee q$$

Ahí está ya en su F. N. C. P. Pues bien, la función en cuestión implica cualquiera de las  $2^4 - 1 = 15$  funciones presentes en la F. N. C. P. Tomemos el primer término como ilustración:

$$q \vee \sim p \vee r$$

Que podemos transformar en:

$$\sim q \supset \sim p \vee r$$

Es decir:

Si un cuerpo no está en velocidad constante, en-

tonces no está en reposo o está en equilibrio.

Es decir, que el siguiente es un argumento perfecto:

Si un cuerpo está en reposo o en velocidad constante si, y sólo si está en equilibrio, entonces si un cuerpo no está en velocidad constante, entonces no está en reposo o está en equilibrio.

Llevemos ahora la función a su F. N. D. P.:

$$p \vee q \equiv r$$

$$p \vee q \supset r : r \supset p \vee q$$

$$\sim(p \vee q) \vee r \sim r \vee p \vee q$$

$$\sim p \cdot \sim q \cdot v \cdot r : \sim r \vee p \vee q$$

$$\sim p \vee r \cdot \sim q \vee r \cdot \sim r \vee p \vee q$$

$$\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r \cdot v \cdot \sim p \cdot \sim q \cdot p \cdot v \cdot \sim p \cdot \sim q \cdot q \cdot v \cdot$$

$$\cdot v \cdot \sim p \cdot r \cdot r \cdot v \cdot \sim p \cdot r \cdot p \cdot v \cdot \sim p \cdot r \cdot q \cdot v \cdot$$

$$\cdot v \cdot r \cdot \sim q \cdot r \cdot v \cdot r \cdot \sim q \cdot p \cdot v \cdot r \cdot \sim q \cdot q \cdot v \cdot$$

$$\cdot v \cdot r \cdot r \cdot \sim r \cdot v \cdot r \cdot r \cdot p \cdot v \cdot r \cdot r \cdot q$$

Eliminando las variables y los términos repetidos y lo que sabemos es falso:

$$\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r \cdot v \cdot \sim p \cdot r \cdot v \cdot \sim p \cdot r \cdot q \cdot v \cdot$$

$$\cdot v \cdot r \cdot \sim q \cdot v \cdot r \cdot \sim q \cdot p \cdot v \cdot r \cdot p \cdot v \cdot r \cdot q$$

Añadimos las variables que faltan en cada término y aplicamos la ley distributiva:

$$\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r \cdot v \cdot q \vee \sim q \cdot \sim p \cdot r \cdot v \cdot \sim p \cdot r \cdot q \cdot v \cdot$$

$$\cdot v \cdot p \vee \sim p \cdot r \cdot \sim q \cdot v \cdot r \cdot \sim q \cdot p \cdot v \cdot q \vee \sim q \cdot r \cdot$$

$$\cdot p \cdot v \cdot p \vee \sim p \cdot r \cdot q$$

$$\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r \cdot v \cdot q \cdot \sim p \cdot r \cdot v \cdot \sim q \cdot p \cdot r \cdot v \cdot$$

$$\sim p \cdot r \cdot q \cdot v \cdot p \cdot r \cdot \sim q \cdot v \cdot \sim p \cdot r \cdot \sim q \cdot v \cdot$$

$$.v. r . \sim q . p . v. q . r . p . v. \sim q . r . p . v.$$

$$.v. p . r . q . v. \sim p . r . q$$

Eliminamos los términos repetidos:

$$\sim p . \sim q . \sim r . v. q . \sim p . r . v. \sim q . p . r . v.$$

$$.v. \sim p . r . \sim q . v. q . r . p$$

Ahí está ya en su F. N. D. P. Cualquiera de estos términos o combinación de ellos implican la función original. En total son  $2^5 - 1 = 31$ . Tomemos el primer término como ejemplo:

$$\sim p . \sim q . \sim r$$

Que podemos transformar en:

$$\sim(\sim p \supset q) . \sim r$$

Y que interpretamos:

Es falso que si un cuerpo no está en reposo, está en velocidad constante, sin estar ese cuerpo en equilibrio.

Es decir, que el siguiente es un argumento perfecto:

Si es falso que si un cuerpo no está en reposo, está en velocidad constante, sin estar ese cuerpo en equilibrio, entonces un cuerpo está en reposo o en velocidad constante si, y sólo si está en equilibrio.



## RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS.-

Ejercicio 1.-

a)

- 1)  $(p \cdot q) \vee r$
- 2)  $p \cdot (q \vee r)$
- 3)  $(p \supset q) \cdot (q \supset p)$
- 4)  $[p \cdot (q \supset r)] \cdot s$
- 5)  $[p \cdot \sim(q \cdot r)] \vee p$
- 6)  $[p \cdot \sim(q \cdot r)] \vee p$
- 7)  $(p \vee q) \cdot \{[p \equiv (q \supset r)] \vee (s \vee t)\}$
- 8)  $\{(p \vee q) \cdot \{(p \equiv q) \supset [r \vee (s \vee t)]\}\} \supset p$
- 9)  $(q \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)]$

b)

- 1)  $\sim p \cdot \supset \cdot \sim p \cdot \sim p$
- 2)  $\sim(p \vee q) \supset r$
- 3)  $q \supset r : \supset : p \vee q \cdot \supset \cdot p \vee r$
- 4)  $\sim(p \cdot \supset \cdot p \vee p : \supset : p \supset p)$
- 5)  $p \vee p : \supset : p \cdot \supset \cdot p \vee p : \supset : p \equiv p$
- 6)  $\sim(p \cdot q) \cdot \circ \cdot q : p \cdot r$
- 7)  $p \cdot p : \equiv : q \cdot v \cdot r \supset s$
- 8)  $p \cdot p \cdot v \cdot q \vee \sim(r \supset s)$

Ejercicio 2.-

a)

- 1) NKpNp
- 2) CCpNqCqNp
- 3) CKCpqpq
- 4) KCNApqKNpNqCKNpNqNAPq

b)

- 1)  $p \vee \sim p$
- 2)  $p \supset q \cdot \sim q \cdot \supset \cdot \sim p$
- 3)  $p \vee q \cdot \sim q \cdot \supset \cdot p$

Ejercicio 3.-

a)

- 1)  $q \cdot p$
- 2)  $q \supset p$
- 3)  $p \supset \sim q$
- 4)  $q \cdot p$
- 5)  $q \cdot p$
- 6)  $p \vee q$
- 7)  $p \equiv \sim q$
- 8)  $q \supset p$
- 9)  $q \supset p$
- 10)  $q \supset p$
- 11)  $p \supset q$
- 12)  $p \equiv q$
- 13)  $q \equiv \sim p$
- 14)  $p \supset q$
- 15)  $q \vee \sim p$
- 16)  $p \vee q$
- 17)  $q \equiv p$
- 18)  $p \downarrow q$
- 19)  $\sim(p \cdot q)$
- 20)  $\sim p \cdot q$
- 21)  $p / q$

b)

1)  $p \vee q \supset r \vee p \cdot s \cdot v \cdot q \cdot t$ 

c)

1)  $p \vee q \cdot p$   
 $p \cdot v \cdot q \cdot p$

Ejercicio 4.-

1)

p	q	$\sim q$	$p \vee q$	$p \vee q \cdot \sim q$	$p \vee q \cdot \sim q \cdot p$
V	V	F	V	F	V
V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	F	V

$p \vee q \cdot \sim q$	$\supset$	p
V V V F FV	V	V
V V F V VF	V	V
F V V F FV	V	F
F F F F VF	V	F

2)

p	q	r	$p \cdot r$	$p \cdot r \cdot \supset \cdot q$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

p	r	$\supset$	q
V	V	V	V
V	F	F	V
V	V	F	F
V	F	F	F
F	F	V	V
F	F	F	V
F	F	V	F
F	F	F	F

3)

p	q	r	$\sim q$	$\sim r$	$p \cdot \sim q$	$\sim(p \cdot \sim q)$	$\sim(p \cdot \sim q) \vee \sim r$
V	V	V	F	F	F	V	V
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	F	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V

$\sim(p \cdot \sim q)$	$\vee$	$\sim r$		
V	V	FV	V	FV
V	V	FV	V	VF
F	V	VF	F	FV
F	V	VF	V	VF
V	F	FV	V	FV
V	F	FV	V	VF
V	F	VF	V	FV
V	F	VF	V	VF

4)

p	q	$\sim q$	$p \supset q$	$p \cdot \sim q$	$\sim(p \cdot \sim q)$
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	F
F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V

  

$p \supset q \cdot \equiv \cdot \sim(p \cdot \sim q)$	$\sim[p \supset q \cdot \equiv \cdot \sim(p \cdot \sim q)]$
V	F
V	F
V	F
V	F

$$\sim [p \supset q \equiv \sim(p \cdot \sim q)]$$

F	V	VV	V	V	V	F	FV
F	V	FF	V	F	V	V	VF
F	F	VV	V	V	F	F	FV
F	F	VF	V	V	F	F	VF

Ejercicio 5.-

1)

$$\underline{p \vee q \cdot \sim q \cdot \supset \cdot p}$$

$$T \vee q \cdot \sim q \cdot \supset \cdot T \quad \perp \vee q \cdot \sim q \cdot \supset \cdot \perp$$

T

$$\underline{\sim(q \cdot \sim q)}$$

$$\sim(T \cdot \sim T) \quad (\perp \cdot \sim \perp)$$

$$\sim(\perp) \quad \sim(\perp)$$

T

T

2)

$$\underline{p \cdot r \cdot \supset \cdot q}$$

$$T \cdot r \cdot \supset \cdot q \quad \perp \cdot r \cdot \supset \cdot q$$

$$\underline{r \supset q}$$

$$\perp \supset q$$

$$T \supset q \quad \perp \supset q$$

T

q

T

T  $\perp$

3)

$$\begin{array}{c} \underline{\sim(p \cdot \sim q) \vee \sim r} \\ \sim(T \cdot \sim q) \vee \sim r \quad \sim(\perp \cdot \sim q) \vee \sim r \\ \underline{q \vee \sim r} \qquad T \vee \sim r \\ T \vee \sim r \quad \perp \vee \sim r \qquad T \\ T \qquad \underline{\sim r} \\ \sim T \quad \sim \perp \\ \perp \quad T \end{array}$$

4)

$$\begin{array}{c} \underline{\sim[p \supset q \cdot \equiv \cdot \sim(p \cdot \sim q)]} \\ \sim[T \supset q \cdot \equiv \cdot \sim(T \cdot \sim q)] \quad \sim[\perp \supset q \cdot \equiv \cdot \sim(\perp \cdot \sim q)] \\ \underline{\sim(q \equiv q)} \qquad \sim(T \equiv T) \\ \sim(T \equiv T) \quad \sim(\perp \equiv \perp) \qquad \perp \\ \perp \qquad \perp \end{array}$$

Ejercicio 6.-

a)

- 1)  $\sim p \vee q$
- 2)  $p \vee q$
- 3)  $\sim p \vee \sim q$
- 4)  $p \vee \sim q$
- 5)  $\sim(p \vee q)$
- 6)  $\sim(\sim p \vee \sim q)$
- 7)  $\sim(p \vee \sim q)$
- 8)  $\sim(\sim p \vee q) \cdot \vee \cdot \sim r \vee s$
- 9)  $\sim(\sim p \vee \sim q) \cdot \vee \cdot r \vee s$
- 10)  $\sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim r \vee \sim s)$

- 11)  $\sim[\sim(\sim p \vee \sim q) \cdot v \cdot \sim r \vee s]$
- 12)  $\sim(\sim p \cdot v \cdot \sim q \vee r) \vee s$
- 13)  $\sim(\sim p \cdot v \cdot q \vee r) \vee \sim s$
- 14)  $\sim[\sim(p \cdot v \cdot q \vee \sim r) \vee \sim s]$
- 15)  $p : v : \sim q \cdot v \cdot \sim r \vee \sim s$
- 16)  $\sim(\sim p \vee \sim q)$
- 17)  $\sim(p \vee \sim q)$
- 18)  $\sim(\sim p \vee q)$
- 19)  $\sim(p \vee q)$
- 20)  $p \vee \sim q$
- 21)  $p \vee q$
- 22)  $\sim(\sim p \vee \sim q \cdot v \cdot \sim r \vee \sim s)$
- 23)  $\sim[p \vee \sim q \cdot v \cdot \sim(\sim r \vee s)]$
- 24)  $\sim p \vee q \cdot v \cdot r \vee s$
- 25)  $\sim(\sim p \cdot v \cdot \sim q \vee \sim r \cdot v \cdot \sim s)$
- 26)  $\sim(p : v : \sim q \vee r \cdot v \cdot s)$
- 27)  $\sim[\sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)]$
- 28)  $\sim[\sim(p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee \sim p)]$
- 29)  $\sim[\sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim(q \vee p)]$
- 30)  $\sim[\sim(p \vee \sim q) \vee \sim(q \vee \sim p)]$
- 31)  $\sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)$
- 32)  $\sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim(q \vee p)$
- 33)  $\sim(p \vee \sim q) \vee \sim(q \vee \sim p)$
- 34)  $\sim\{\sim\{\sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p) \cdot v \cdot \sim[\sim(\sim r \vee q) \vee \sim(\sim q \vee r)]\} \vee \sim\{\sim(\sim r \vee q) \vee \sim(\sim q \vee r) \cdot v \cdot \sim[\sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)]\}\}$
- 35)  $\sim\{\sim\{\sim(p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee \sim p) \cdot v \cdot \sim[\sim(s \vee p) \vee \sim(\sim p \vee \sim s)] \vee \sim\{\sim(s \vee p) \vee \sim(\sim p \vee \sim s) \cdot v \cdot \sim[\sim(p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee \sim p)]\}\}\}$
- 36)  $\sim\{\sim\{\sim[\sim(p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee \sim p)] \vee \sim[\sim(\sim q \vee p) \vee \sim(\sim p \vee q)]\} \vee \sim[\sim(\sim q \vee p) \vee \sim(\sim p \vee q) \cdot v \cdot \sim(p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee \sim p)]\}\}$
- 37)  $\sim p \vee \sim q \cdot v \cdot \sim(\sim r \vee \sim s)$

- 38)  $\sim p \vee q \cdot v \cdot \sim r \vee \sim s$   
 39)  $\sim[\sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim(\sim r \vee s)] \cdot v \cdot t$   
 40)  $\sim p \vee q \cdot v \cdot \sim r \vee \sim s : v : t$   
 41)  $\sim p \vee q \cdot v \cdot \sim\{\sim[\sim p \vee \sim(\sim q \vee r)]\} \vee \sim(\sim q \vee r) \cdot v \cdot t$

b)

- 42)  $\sim p \supset q$   
 43)  $p \supset q$   
 44)  $\sim p \supset \sim q$   
 45)  $p \supset \sim q$   
 46)  $\sim(p \supset \sim q)$   
 47)  $\sim(\sim p \supset q)$   
 48)  $\sim(\sim p \supset q) \cdot \supset \cdot \sim r \supset s$   
 49)  $\sim(\sim p \supset \sim q) \cdot \supset \cdot r \supset s$   
 50)  $\sim(\sim p \supset q) \supset \sim(\sim r \supset \sim s)$   
 51)  $\sim(\sim p \supset \sim q) \cdot \supset \cdot \sim r \supset s$   
 52)  $\sim(\sim p \cdot \supset \cdot \sim q \supset r) \supset s$   
 53)  $\sim(\sim p_1 \cdot \supset \cdot \sim p_2 \supset p_3) \supset p_4$   
 54)  $\sim(\sim p_1 \cdot \supset \cdot p_2 \supset \sim p_3) \supset \sim p_4$   
 16)  $\sim(p \supset \sim q)$   
 17)  $\sim(\sim p \supset \sim q)$   
 18)  $\sim(p \supset q)$   
 19)  $\sim(\sim p \supset q)$   
 20)  $\sim p \supset \sim q$   
 21)  $\sim p \supset q$   
 22)  $\sim[\sim(p \supset \sim q) \cdot \supset \cdot r \supset \sim s]$   
 23)  $\sim[\sim(\sim p \supset \sim q) \supset \sim(r \supset s)]$   
 24)  $\sim(p \supset q) \cdot \supset \cdot \sim r \supset s$   
 25)  $\sim[p \cdot \supset \cdot \sim(q \supset \sim r) \supset \sim s]$   
 26)  $\sim[\sim p \cdot \supset \cdot \sim(q \supset r) \supset s]$   
 27)  $\sim[p \supset q \cdot \supset \cdot \sim(q \supset p)]$   
 28)  $\sim[\sim p \supset q \cdot \supset \cdot \sim(q \supset \sim p)]$   
 29)  $\sim[p \supset \sim q \cdot \supset \cdot \sim(\sim q \supset p)]$   
 30)  $\sim[\sim p \supset \sim q \cdot \supset \cdot \sim(\sim q \supset \sim p)]$

- 31)  $p \supset q \cdot \supset \cdot \sim (q \supset p)$   
 32)  $p \supset \sim q \cdot \supset \cdot \sim (\sim q \supset p)$   
 33)  $\sim p \supset \sim q \cdot \supset \cdot \sim (\sim q \supset \sim p)$   
 34)  $\sim \{ \sim [p \supset q \cdot \supset \cdot \sim (q \supset p)] \supset \sim [r \supset q \cdot \supset \cdot \sim (q \supset r)] \cdot \supset \cdot \supset \cdot \sim \{ \sim [r \supset q \cdot \supset \cdot \sim (q \supset r)] \supset \sim [p \supset q \cdot \supset \cdot \sim (q \supset p)] \} \}$   
 35)  $\sim \{ \sim [\sim p \supset q \cdot \supset \cdot \sim (q \supset \sim p)] \supset \sim [\sim s \supset p \cdot \supset \cdot \sim (p \supset \sim s)] \cdot \supset \cdot \supset \cdot \sim \{ \sim [\sim s \supset p \cdot \supset \cdot \sim (p \supset \sim s)] \supset \sim [\sim p \supset q \cdot \supset \cdot \sim (q \supset \sim p)] \} \}$   
 36)  $\sim \{ \sim p \supset q \cdot \supset \cdot \sim (q \supset \sim p) : \supset : \sim [q \supset p \cdot \supset \cdot \sim (p \supset q)] : \supset : \cdot \supset : \cdot \sim \{ \sim [q \supset p \cdot \supset \cdot \sim (p \supset q)] : \supset : \sim p \supset q \cdot \supset \cdot \supset \cdot \sim (q \supset \sim p) \} \}$   
 37)  $\sim (p \supset \sim q) \supset \sim (r \supset \sim s)$   
 38)  $\sim (p \supset q) \cdot \supset \cdot r \supset \sim s$   
 39)  $\sim \{ \sim [p \supset \sim q \cdot \supset \cdot \sim (r \supset s)] \supset t \}$   
 40)  $\sim (p \supset q) \cdot \supset \cdot \sim (r \supset \sim s) \supset t$   
 41)  $\sim (p \supset q) \supset \sim \{ p \supset \sim (q \supset r) \supset \sim [\sim (q \supset r) \supset p] \}$

- 1)  $\sim (p \cdot \sim q)$   
 2)  $\sim (\sim p \cdot \sim q)$   
 3)  $\sim (p \cdot q)$   
 4)  $\sim (\sim p \cdot q)$   
 5)  $\sim p \cdot \sim q$   
 6)  $p \cdot q$   
 7)  $\sim p \cdot q$   
 8)  $\sim [\sim (p \cdot \sim q) : r \cdot \sim s]$   
 9)  $\sim [\sim (p \cdot q) : \sim r \cdot \sim s]$   
 10)  $\sim [\sim (p \cdot \sim q) \cdot \sim (r \cdot s)]$   
 11)  $\sim (p \cdot q) : r \cdot \sim s$   
 12)  $\sim [\sim (p : q \cdot \sim r) \cdot \sim s]$   
 13)  $\sim [\sim (p : \sim q \cdot \sim r) \cdot s]$   
 14)  $\sim (\sim p : \sim q \cdot r) \cdot s$   
 15)  $\sim (\sim p \cdot \cdot q : r \cdot s)$

- 27)  $\sim(p \cdot \sim q) \cdot \sim(q \cdot \sim p)$   
 28)  $\sim(\sim p \cdot \sim q) \cdot \sim(q \cdot p)$   
 29)  $\sim(p \cdot q) \cdot \sim(\sim q \cdot \sim p)$   
 30)  $\sim(\sim p \cdot q) \cdot \sim(\sim q \cdot p)$   
 31)  $\sim[\sim(p \cdot \sim q) \cdot \sim(q \cdot \sim p)]$   
 32)  $\sim[\sim(p \cdot q) \cdot \sim(\sim q \cdot \sim p)]$   
 33)  $\sim[\sim(\sim p \cdot q) \cdot \sim(\sim q \cdot p)]$   
 34)  $\sim\{\sim(p \cdot \sim q) \cdot \sim(q \cdot \sim p) : \sim[\sim(r \cdot \sim q) \cdot \sim(q \cdot \sim r)] \cdot \sim\{\sim(r \cdot \sim q) \cdot \sim(q \cdot \sim r) : \sim[\sim(p \cdot \sim q) \cdot \sim(q \cdot \sim p)]\}\}$   
 35)  $\sim\{\sim(\sim p \cdot \sim q) \cdot \sim(q \cdot p) : \sim[\sim(\sim s \cdot \sim p) \cdot \sim(p \cdot s)]\} \cdot \sim\{\sim(\sim s \cdot \sim p) \cdot (p \cdot s) : \sim[\sim(\sim p \cdot \sim q) \cdot (q \cdot p)]\}$   
 36)  $\sim\{\sim[\sim(\sim p \cdot \sim q) \cdot \sim(q \cdot p)] \cdot \sim[\sim(q \cdot \sim p) \cdot \sim(p \cdot \sim q)] : \sim\{\sim(q \cdot \sim p) \cdot \sim(p \cdot \sim q) : \sim(\sim p \cdot \sim q) \cdot \sim(q \cdot p)\}\}$   
 37)  $\sim[p \cdot q : \sim(r \cdot s)]$   
 38)  $\sim(p \cdot \sim q : r \cdot s)$   
 39)  $\sim(p \cdot q) \cdot \sim(r \cdot \sim s) : \sim t$   
 40)  $\sim(p \cdot \sim q : r \cdot s \cdot \sim t)$   
 41)  $\sim\{p \cdot \sim q : \sim\{\sim[p \cdot \sim(q \cdot \sim r)] \cdot \sim(q \cdot \sim r : \sim p)\}\}$   
 42)  $\sim(\sim p \cdot \sim q)$   
 43)  $\sim(p \cdot \sim q)$   
 44)  $\sim(\sim p \cdot q)$   
 45)  $\sim(p \cdot q)$   
 46)  $p \cdot q$   
 47)  $\sim p \cdot \sim q$   
 48)  $\sim(\sim p \cdot \sim q : \sim r \cdot \sim s)$   
 49)  $\sim(\sim p \cdot q : r \cdot \sim s)$   
 50)  $\sim[\sim p \cdot \sim q : \sim(\sim r \cdot s)]$   
 51)  $\sim(\sim p \cdot q) : \sim r \cdot \sim s$   
 52)  $\sim(\sim p : \sim q \cdot \sim r \cdot \sim s)$   
 53)  $\sim(\sim p_1 : \sim p_2 \cdot \sim p_3 \cdot \sim p_4)$

$$54) \sim(\sim p_1 : p_2 \cdot p_3 \cdot \circ \cdot p_4)$$

d) La expresión simbólica de la proposición es:

$$p \cdot q \cdot \equiv \cdot r \cdot s \vee t$$

Es decir:

$$p \cdot q \cdot \supset \cdot r \cdot s \vee t : r \cdot s \vee t \cdot \supset \cdot p \cdot q$$

Luego, de acuerdo con la fórmula:

$$2 \times 9 \times 3^9 = 354,294$$

e) Su expresión simbólica es:

$$\sim[\sim(\sim p \vee \sim q) \cdot \sim r]$$

Transformamos la disyunción en conjunción y la conjunción en condicional (guiados por el criterio de eliminar paréntesis):

$$p \cdot q \cdot \supset \cdot r$$

Que interpretamos:

Si sale electo de diputado y cumple su palabra, el pueblo doblará su estima por él.

### Ejercicio 7.-

a)

$$1) \sim(p \cdot \sim q) \cdot \sim(\sim p \cdot \sim q)$$

$$2) \sim p \vee q \cdot p \vee q$$

$$3) p \cdot q \cdot \vee \cdot \sim p \cdot q$$

$$4) \sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim(p \vee \sim q)$$

$$5) p \supset q \cdot \sim p \supset q$$

$$6) \sim(p \supset \sim q) \vee \sim(\sim p \supset \sim q)$$

b)

$$1) p \vee \sim q \vee \sim r \cdot p \vee \sim q \vee r$$

$$2) p \cdot \sim q \cdot r \cdot \vee \cdot p \cdot \sim q \cdot \sim r$$

$$3) \sim p \vee q \vee r \cdot p \vee \sim q \vee \sim r \cdot p \vee \sim q \vee r$$

Ejercicio 8.-

- 1) F. N. D. :  $p \cdot \sim q \cdot v \cdot \sim p \vee q$ , luego es consistente.  
 F. N. C. :  $p \vee \sim p \vee q \cdot \sim q \vee \sim p \vee q$ , ambos términos son eliminables, luego es tautológica.
- 2) F. N. C. :  $\sim p \vee q \cdot \sim q \cdot p$ , luego es falsa en por lo menos un caso.  
 F. N. D. :  $\sim p \cdot \sim q \cdot p \cdot v \cdot q \cdot \sim q \cdot p$ , ambos términos son eliminables, luego es contraválida.
- 3) F. N. D. :  $p \cdot p \cdot v \cdot q \cdot q$ , (en virtud de " $p \cdot \supset \cdot \supset \cdot p \cdot p$ "), luego es consistente.  
 F. N. C. :  $p \vee q \cdot p \vee q$ , (en virtud de lo mismo), luego es falsa en por lo menos un caso.
- 4) F. N. D. :  $p \cdot \sim q \cdot v \cdot p \cdot \sim q$ , (en virtud de " $p \cdot \supset \cdot p \vee p$ "), luego es consistente.  
 F. N. C. :  $p \vee p \cdot \sim q \vee \sim q$ , (en virtud de lo mismo), luego es falsa en por lo menos un caso.

# I N D I C E

PREFACIO.....	7
INTRODUCCION.....	9
PROPOSICIONES PRIMARIAS Y SECUNDARIAS.....	13
FORMALIZACION DEL LENGUAJE.....	16
LOS OPERADORES LOGICOS PROPOSICIONALES.....	22
La negación.....	25
La disyunción.....	27
La conjunción.....	32
La condicional.....	36
La bicondicional.....	42
LOS PUNTOS.....	47
OTRAS NOTACIONES Y LOS OPERADORES DE SHEFFER.....	54
LA TRADUCCION.....	61
LAS TABLAS.....	66
EL METODO DE QUINE.....	73
LAS TRANSFORMACIONES.....	88
EL METODO DE POST.....	101
LAS FORMAS NORMALES.....	119
La ley distributiva.....	119
Las formas normales.....	121
La forma normal disyuntiva.....	122
Primera aplicación de la F. N. D. ....	124
Segunda aplicación de la F. N. D. ....	125
La forma normal conjuntiva.....	128
Primera aplicación de la F. N. C. ....	128
Segunda aplicación de la F. N. C. ....	131
Las formas normales principales.....	133
Primera aplicación de las formas normales principales.....	135
Segunda aplicación de las formas normales principales.....	136
RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS.....	145

BIBLIOTECA NACIONAL DE PANAMÁ



34189000742660