JOSE DE JESUS MARTINEZ

ALEPH - CERO

INTRODUCCIÒN
A LA FILOSOFIA
MATEMATICA
DEL INFINITO

EDICIONES DE LA GUARDIA NACIONAL Y DE ECOMAT, DEL
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL.

PANAMA 1977

JOSE DE JESUS MARTINEZ

ALEPH - CERO

INTRODUCCÌON A LA FILOSOFIA MATEMATICA DEL INFINITO

EDICIONES DE LA GUARDIA NACIONAL Y DE ECOMAT, DEL DEPARTAMENTO DE MATEMATICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL.

PANAMA 1977

AL PROFESOR AGUSTIN COLAMARCO
MAESTRO Y AMIGO:

INTRODUCCION

La teoría del infinito es triplemente bella: por lo que dice, por la forma en que lo dice, y por lo que da que decir. Difícilmente encontraremos en otra disciplina noticias tan desconcertantes y que sin embargo de algún modo nos atañen personalmente. Espinoza se atrevió a confesar lo que seguramente todos hemos pensado: que algunas veces nos sentimos "como si fuésemos eternos". Por otra parte, las demostraciones de esta teoría, aun expuestas por pluma torpe y poco rigurosa, son de una belleza incomparable. Tan ágilmente se mueve la razón en ese medio, que pareciera es su agua natural, su tema predilecto.

Por último, lo que esta teoría da que pensar, y que queda absolutamente a cargo del lector porque son asuntos de la vida personalísima e íntima, es lo que Platón consideraba la misión de la filosofía: "prepararnos para la muerte". Aunque el hombre no hiciera nada grande en el mundo, muere, y eso lo hace infinitamente. Ni Dios nos gana en eso.

Este ensayo es una introducción muy superficial pero que no ha querido sacrificar ninguno de los dos primeros aspectos anteriores. Aunque no se supone, (casi ni se desea), ningún conocimiento matemático, sí se requiere seguir las pruebas con cuidado y recordar los resultados obtenidos y las definiciones que se van dando. Todo esfuerzo que se haga en este sentido, es recompensado con una ampliación, (¿por qué no decirlo si es la palabra justa?), realmente infinita de nuestro horizonte conceptual y vivencial.

Algunas veces se sumergen en un poco de reflexión filosófica y poética las ideas que nos vamos ganando, porque estamos convencidos de que el contexto más natural del infinito no es necesariamente la matemática. Lo que sucede es que, por lo general, les ha faltado a los poetas y los filósofos la audacia y franqueza necesarias para decir lo que los matemáticos, amparados de esa aparenta frialdad del técnico, han dicho disimulándolo y encubriéndolo de signos esotéricos.

Para quien ya conozca el tema y quiera sin embargo leer este trabajo, vaya la advertencia de que no encontrará nada nuevo y de que tendrá que darse la molestia de entender sin signos. Para él eso será más difícil, pero no para quien está habituado sólo a los signos y los conceptos del lenguaje cotidiano. Por ejemplo, el concepto de parte o subconjunto. Aquí se lo emplea en el sentido corriente, como lo emplea el niño cuando pide un pedazo de pan, sin pensar que le van a dar el pan entero ni tampoco una parte vacía. Es decir, usamos "parte" como subconjunto propio o estricto y casi nunca como parte vacía.

Por último, hemos preferido seguir a los autores que en lugar del par de conceptos: contable y enumerable, usan, respectivamente, el de enumerable e infinito enumerable. En primer lugar, porque si le llamamos enumerable a un infinito determinado, su negación, lo innumerable, podría ser finito, contradiciéndose la riqueza que el concepto de innumerabilidad connota normalmente.

En segundo lugar, porque parece que el verbo contar implica una actividad, al menos más que el de enumerar, que consume tiempo, y es violento pensar que algo pueda ser infinito y contable a la vez.

El lector avezado podrá descubrir por sí mismo algunos otros ajustes sin importancia que habría que hacerle al presente ensayo para ponerlo de acuerdo con la literatura del tema. Es justamente a él a quien va dirigido el apéndice que aparece al final.

I

GALILEO

Galileo lo vió con toda claridad en el siglo XVII: Las nociones de "grande", "menor", "igual", que tan inteligentemente ordenan y califican a los conjuntos finitos entre los cuales vivimos, no funcionan al nivel de lo infinito, en el que tantas veces pensamos y sentimos. El ejemplo con el que Galileo ilustra el comportamiento **raro** de los conjuntos infinitos cuando se los trata con las nociones y el instrumental de lo finito, es clásico en la historia de la matemática. Aparece en su **Diálogo de las dos Nuevas Ciencias.** Helo aquí, desprovisto de la agilidad y del asombro que en el lenguaje original de Galileo tiene: Nada más lógico y cuerdo que pensar que hay más números naturales, esos que usamos para contar, 1, 2, 3, 4, etc...., que números cuadrados perfectos, es decir, aquellos que son el producto de algún natural por sí mismo, como por ejemplo, 1, 4, 9, 16, 25, etc......, cuadrados de 1, 2, 3, 4, 5, etc....., respectivamente. En efecto, todo cuadrado perfecto es un natural, pero no todo natural es un cuadrado perfecto. El 3, por ejemplo, no es un cuadrado perfecto, ni el 15, ni el 18, etc... Decimos entonces que el conjunto de los naturales **es más grande** que el de los cuadrados perfectos. Y sin embargo, y aquí comienza lo raro, existe un natural único para cada cuadrado y un cuadrado único para cada natural. El siguiente diagrama ilustra esta correspondencia de uno a uno entre N, el conjunto de los naturales, y el conjunto de los cuadrados perfectos, que podemos llamar C:

$$\begin{array}{lccccccccc} N: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n & \dots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ C: & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & \dots & n^2 & \dots \end{array}$$

Lo que equivale a decir que hay **igual** cantidad de números naturales que de cuadrados perfectos. En resumen, N es más grande que C, (C es apenas una **parte** de N), y sin embargo ambos tienen la misma cantidad de elementos. Obsérvese que se está violando el famoso axioma de Euclides que afirma que el todo es mayor que cada una de sus partes. ¡Galileo acaba de encontrar un todo, N, igual a una de sus partes, C. !

Galileo no se contenta con mostrar la paradoja. Para el hombre de ciencia, a diferencia del dilettante, la paradoja no tiene ninguna gracia. Por el contrario, es algo bien grave, mucho más grave que el error, porque todo error puede convertirse en verdad sencillamente negándosele, en tanto que la paradoja permanece aun negando cualquiera de sus términos en conflicto. La raíz de la paradoja, dice Galileo, es que tanto N como C son conjuntos infinitos, harina de otro costal diferente de éste en el que estamos metidos con los conjuntos finitos.

La observación de Galileo no tuvo ninguna resonancia en su época. Su época no estaba lo suficientemente madura; además, acababa de salir de la Edad Media y oponía a la vocación teológica, trascendente, del espíritu feudal, la del Humanismo del Renacimiento. Y la perspectiva de lo humano –así se lo considera falsamente por oposición lógica y política a lo divino– es el horizonte de lo finito. Es la época en que Lutero prohibe razonar sobre Dios; a Dios podemos amarlo sólo, no comprenderlo, como lo pretendía la teología medieval. La teología, como razón de Dios, ciencia de lo divino, queda proscrita. Lo infinito se declara fuera de límite para la razón humana. Se desprecia lo gótico en su afán de infinita verticalidad, y la línea horizontal viene a detener, a interrumpir, en la arquitectura renacentista, todo sentimiento de ascenso sin fin. Se le advierte al hombre que la única forma de inmortalidad y de trascendencia a la que tiene acceso es la de la fama; que la única vía de engrandecimiento es la exploración marítima y terrestre, y aun por vía de los astros, pero siempre sujeto a los límites impuestos a la razón. En el Renacimiento el hombre toma asiento en la tierra y en la conciencia de su finitud. Y por esto mismo, como una compensación de la finitud humana, se desarrolla la tecnología. El telescopio, la máquina, el termómetro. . . ..son llamados a reforzar la vista, la fuerza, el tacto. . ., pero únicamente porque se ha tomado nota de sus limitaciones naturales.

Ni el mismo Galileo se atrevió a rastrear ese cabo de hilo que había de conducir a Georg Cantor, dos siglos después, al descubrimiento de un "paraíso que —según declara Hilbert— nada ni nadie podrá hacernos abandonar". El gran siglo XIX, siglo de Marx, de Cantor, se desentiende de Dios, "hipótesis innecesaria", (son palabras de Laplace), y en consecuencia de los tabúes que mantenían cerrado el reino de lo infinito. Ya sin oposición teológica, "Cantor invade y se toma el cielo". Y el camino a él que nos dejó trazado en sus papeles y teoremas, no es el humillante y aun imposible —puesto que sólo los muertos pueden recorrerlo— que la religión predica, sino la vía hermosa y clara de la inteligencia. "Nuestro reino es de este mundo, pero también del otro".

Es muy notable, y quizás sintomático, que este camino que lleva a las nociones desde las cuales podemos entender y apropiarnos del infinito y sus propiedades, arranca de un concepto bien primitivo. Primitivo, en el sentido de que un niño o un salvaje que no pudiera, no digamos leer y hacer cómputos matemáticos, ni siquiera hablar ni contar hasta uno, podría sin embargo entenderlo a fondo. Es el concepto de la coordinabilidad.

II

LA COORDINABILIDAD

Un hecho psicológico que podemos comprobar fácilmente es que el hombre no puede ver una cosa. Inmediatamente la relaciona con otra. Un perro, por ejemplo, ve una mancha en la pared, y ve una mancha en la pared. Pero la ve un hombre y de inmediato la liga, o quiere ligar, con algo. ¿Es sangre? ¿Quién la hizo? ¿Qué sentido tiene? ¿Qué significa?

Se ha identificado la inteligencia con la capacidad de relacionar. Esto puede que sea una exageración, pero en ningún caso es una exageración desorbitada. Le es esencial a la inteligencia unir, sintetizar, como decían los griegos, atar cabos, ordenar, y en consecuencia embellecer.

Ahora bien, la relación más ingenua y pura es la que, sin consultar la naturaleza de los objetos, los compara. De esta elementalísima comparación, de esta mínima capacidad intelectual, surge el reconocimiento de esa relación que se da entre dos conjuntos cuando los elementos que los constituyen pueden parearse o embonar, de manera tal que a cada uno de los elementos de uno de los conjuntos le corresponde un elemento único del otro conjunto, y recíprocamente. Actualmente se le llama **coordinabilidad** a esta relación. Dos conjuntos son coordinables si entre los elementos que los constituyen hay una correspondencia de uno a uno. Por ejemplo, una mano, considerada como un conjunto de dedos, es coordinable con el conjunto de las vocales; un rebaño de ovejas que de noche regresan al corral, es coordinable con las marcas que he hecho en un hueso de mamut cuando, al salir las ovejas por la mañana, hacía una por cada oveja que abandonaba el corral. (Se han encontrado huesos así marcados más viejos que cualquiera otra manifestación cultural del hombre. Es su primera señal de vida humana).

Podría definirse la coordinabilidad de un modo mucho más sencillo diciendo que es la relación que hay entre dos conjuntos cuando tienen el mismo número de elementos. Sólo que entonces estaríamos suponiendo la noción de número, dándola por sabida, y justamente lo que querremos en un capítulo próximo es ganárnosla, conquistarla lógicamente.

Conviene ahora tomar nota de tres propiedades que la relación de coordinabilidad tiene y que más adelante van a jugar un papel. No importa que sean demasiado obvias y que casi no haya necesidad de señalarlas. Cuando se camina sobre zona minada –y el camino al paraíso de Cantor lo está como ninguna otra– es recomendable andar con mucho cuidado.

En primer lugar, todo conjunto es coordinable consigo mismo. A las relaciones que, como la coordinabilidad, gozan de esta propiedad, se las llama **reflexivas.** En segundo lugar, si un conjunto A es coordinable con un conjunto B, entonces B es coordinable con A. A las relaciones que gozan de esta propiedad se las llama **simétricas.** Y en tercer lugar, si un conjunto A es coordinable con un conjunto B, y B es coordinable con un conjunto C, entonces A es coordinable con C. A las que gozan de esta propiedad se las llama relaciones **transitivas.**

Hay muchas relaciones, además de la coordinabilidad, que son también reflexivas, simétricas y transitivas. La identidad, por ejemplo. Todo es idéntico a sí mismo; si una cosa es idéntica a otra, esta segunda es idéntica a la primera; y, por último, si una cosa es idéntica a otra, y esta segunda es idéntica a una tercera, la primera es idéntica a la tercera. También la semejanza física es una relación que goza de estas tres propiedades. Igualmente la congruencia geométrica, la equivalencia lógica. . . Pues bien, por muy diferentes que sean las relaciones de este tipo, cuando no se habla con rigor se las llama a todas **igualdad**. La coordinabilidad, pues, es una especie de igualdad.

Otra cosa que conviene apuntar es que no se necesita poder contar para saber cuándo dos conjuntos son o no coordinables. Si hay una multitud de personas y un montón de sillas, puedo averiguar si estos dos conjuntos, el de las personas y el de las sillas, son coordinables sin necesidad de contarlos. Sencillamente pido a las personas que se sienten. Si no queda nadie de pie ni ningún asiento desocupado, sé automáticamente que los dos conjuntos son coordinables, es decir, que tienen el mismo número de elementos. Esto es lo que hace, en esencia, el ejemplo de Galileo: sentar a cada natural en un cuadrado perfecto, mostrando que no queda ningún natural de pie ni ningún cuadrado perfecto desocupado.

Parece increíble que sobre noción tan clara y primitiva esté montada la teoría del infinito. Su elementalidad sugiere que el tema del infinito, y los que de cerca le rondan, como el de la eternidad, no es el producto de una elaboración mental compleja y rebuscada sino algo casi natural. Porque no se necesita de más para sembrar la fecunda definición de infinitud.

III

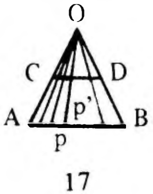
INFINITUD

Un conjunto es infinito si es coordinable con una de sus partes.

Por ejemplo, el conjunto de los números naturales es infinito, pues ya vimos, con los ojos asombrados de Galileo, que era coordinable con una de sus partes, la de los cuadrados perfectos.

Como segundo ejemplo, considérese un segmento de recta AB como el que aparece en la figura:

Como vemos, contiene una parte CD. Véase ahora el siguiente triángulo cuyos vértices son A, B y O. Se lo ha construído de forma tal que O es el punto donde se cortan las rectas que unen a A con C, por una parte, y a B con D, por otra:



Recordamos que una recta es un conjunto de puntos, y comenzamos a unir el punto O, por medio de rayos, con cada uno de los puntos de que está compuesto el segmento AB. En el dibujo, a guisa de ilustración, hemos trazado cuatro de estos rayos. Debe estar claro que los rayos que parten del punto O determinan, para cada punto p del segmento AB, un punto único p' del segmento CD. Y recíprocamente, cada punto p' del segmento CD está unido, por los rayos que parten de O, con un punto único p de AB. Es decir, que tenemos un criterio, una regla, para "sentar" cada punto de AB sobre uno de CD sin que sobre ni falte nada. Esto significa que los segmentos AB y CD son coordinables. Como CD es parte de AB, la definición ha quedado satisfecha: El segmento AB es infinito. ¡Quién lo diría, viéndolo tan pequeño¡ Además, tómese nota de que habríamos podido tomar un segmento aún más pequeño. Si la tipografía lo permitiera, podríamos demostrar que un segmento de un milímetro de largo, o de un milésimo de milímetro, es tan infinito como cualquier otro. El tamaño no significa nada, no es ningún obstáculo para la infinitud.

Como tercer ejemplo, y yéndonos ahora del concepto de infinito a su vivencia, supóngase que amo a una mujer durante una semana sólo, pero en un momento cualquiera de esos siete días escasos, le doy un beso en el que hay tanto amor como el que hubo en la semana entera: mi amor es infinito. No importa que haya durado poco, o que a los quince días ya ni recuerde el nombre de la mujer. No importa que no haya sido mucho, es igual a una de sus partes y eso lo hace infinito. De igual forma podría fumarme un cigarrillo infinitamente si pudiera hacer equivalente a la fumada entera del cigarrillo una sola y distinguida aspirada. Algunos dolores intensos, morales o de muelas, tienen justamente esa propiedad que comento: da igual cinco minutos que media hora de sufrimiento. Son dolores infinitos. Es a propósito que he puesto el dolor de muelas para ilustrar el infinito. Precisamente, se trata de incorporar a la vida, rescatándolo de la teología, el concepto y la vivencia de lo infinito.

Desgraciadamente casi todos los ejemplos siguientes van a salir de la matemática. Y digo desgraciadamente por dos razones. En primer lugar, porque podemos caer en el error de pensar que sólo cuando hacemos matemática entramos en relación con lo infinito, cosa de la que no puedo convencerme. Y en segundo lugar porque el concepto vulgar, y desde luego equivocado, que de la matemática circula, es que es la ciencia de la cantidad. Y no puede haber pasado desapercibido el que la definición de infinito no supone ni siquiera la noción de número, menos aún la de contar, y menos aún todavía la de esos complicadísimos cómputos de la contabilidad y la ingeniería con las que se confunde grotescamente a la matemática. Esto significa que **no** hemos dado una definición cuantitativa. Es, desde luego, una definición matemática, pero porque, con las palabras de George Boole, otro genio del maravilloso siglo XIX, "mathematics is not conversant with the ideas of number and quantity". Es decir, a la matemática no le es esencial ni siquiera el estar familiarizada con la idea de número o de cantidad. "La esencia de la matemática – ahora es el propio Cantor quien habla– es la libertad".

Al no ser cuantitativa la definición, nó podemos decir que lo infinito sea mucho, ni grande, ni **extenso**; es más bien **intenso**, una cualidad: la de ser igual, en el sentido de coordinable, a una parte suya. Es como un color, por ejemplo. Nadie diría que un objeto grande azul es más azul que uno pequeño. Por el contrario, un botón puede ser más azul que el cielo entero. Más adelante veremos cómo, a cambio de la extensión sacrificada, podremos hablar de la fuerza de lo infinito, su potencia, su Mächtigkeit, como dice Cantor.

Es importante mantener separados los conceptos de grande y de infinito. Ni lo infinito es grande ni lo grande es infinito. Decimos que un objeto A es más grande que uno B si algo le queda a A después de haberle quitado una parte equivalente a B. Ya veremos que al nivel de lo infinito no puede reglamentarse ese "quitar" ni en consecuencia definir una operación de resta. La grandeza está definida sólo para lo finito. Sólo lo finito puede ser grande y jamás podrá lo grande ser infinito. Lo infinito no es más que lo finito, es otra cosa.

Resulta altamente conmovedor el que los poetas, cuando han querido comunicar la idea de infinito, hablan de las estrellas en el cielo. En una noche bien estrellada, las estrellas visibles no pasan de 3000. ¡A eso le llaman los poetas infinito! Es mínima su diferencia con los hotentotes que cuentan: uno, dos, tres, infinito, porque para ellos ya más de tres es infinito. Entre 4 y 3000, hay que reconocerlo, la diferencia es despreciable, y es la que separa al poeta del hotentote cuando hablan del infinito. El error que cometió un niño cuando, al preguntársele en una tarde lluviosa cuántas gotas calculaba él que caían sobre la ciudad, y respondió que cien, es un error minúsculo, finito, comparado al error infinito que comete el poeta viendo un cielo estrellado. Por supuesto, hay poetas excepcionales, como Shakespeare cuando afirma, por boca de Hamlet, que podría "sentirse rey de espacios infinitos, encerrado en la cáscara de una nuez".

Además de la noción de número, la idea del infinito es independiente igualmente de la de lo finito. Lo infinito, su definición lo declara explícitamente, no es la negación de lo finito. Es justamente lo contrario: lo finito es la negación de lo infinito, pues se lo define como aquello que no es coordinable con ninguna de sus partes.

En este caso, como en la mayoría, el proceso lógico no coincide con el psicológico. Porque es verdad que psicológicamente la idea de lo infinito se concibe negando lo finito. Después de todo, nuestra experiencia básica, nuestro contexto material, es siempre con conjuntos finitos. Pero la teoría lógica camina con otro compás. Lo que es primero psicológicamente suele ser de lo último desde el punto de vista lógico, y recíprocamente.

Seguramente por esta razón Cantor no emplea la palabra in-finito, (Un-endlichkeit). Prefiere "transfinito", para que la partícula privativa **un (in,** en el vocablo castellano), no sugiera ningún tipo de negación.

Hay que reconocer que es perfectamente posible definir, en base al concepto de número natural, lo finito, y después lo infinito como su negación. Esta forma es equivalente a la que aquí estamos empleando y que se debe a Dedekind, amigo personal y colega de Cantor. Pero pienso que tiene el defecto, la mácula, de que supone la idea y el conocimiento de número natural, y se presta por eso a mayor confusión con lo cuantitativo. Ya hemos advertido, además, que queremos ganarnos la idea de número, pagar por ella. No la queremos gratis. Y encima de todo esto, parece más justo que la definición de infinito sea positiva y negativa la de lo finito.

De todos modos, este segundo método procede así: Se define lo finito como lo que es coordinable con una parte. llamada **segmento inicial débil**, de los números naturales. Esto es, todos los números naturales que preceden a un número natural dado, incluyéndolo. Por ejemplo, el número 5 determina el segmento inicial débil cuyos elementos son 1, 2, 3, 4 y 5. Luego se define negativamente lo infinito como lo no finito, es decir, justamente como lo in-finito, lo que no es coordinable con ningún segmento inicial débil de los naturales. Es bien curioso que este método, que arranca del conocimiento de número natural y que puede parecer más justo porque se asemeja al proceso psicológico, sólo difícilmente, y echando mano a una hipótesis muy fuerte, puede demostrar que el mismo conjunto de los naturales es infinito. Eso que con la definición de Dedekind se prueba en dos líneas.

Se puede demostrar que las dos definiciones de infinito son equivalentes, pero la prueba es demasiado larga para darla aquí. En lo sucesivo vamos a usar generalmente la definición de Dedekind, por las razones ya aducidas, y sólo espóradicamente, con el propósito de simplificar algunas demostraciones, emplearemos la otra. Sobre todo cuando se trate lo finito, pues así se lo puede considerar positivamente. Por ejemplo, si tratara de **demostrar** - y no de **mostrar**- que el conjunto de dedos en una de mis mano **es finito**, procedería a coordinarlo con un segmento inicial débil. El determinado por el número 5. Sería difícil y tedioso demostrar su finitud probando que no tiene ninguna parte con la cual es coordinable. Pero, por otro lado, para demostrar la infinitud de un conjunto, es preferible buscar una parte suya con la cual sea coordinable antes que probar que no existe ningún segmento inicial débil coordinable con él. La equivalencia de las dos definiciones hacen posible elegir el método de demostración que en el caso particular sea el más cómodo o el más elegante.

Armados ya del concepto de infinito, conviene ahora un capítulo corto entre paréntesis para distinguirlo de algo con lo que se lo confunde mucho: lo interminable. No importa que después tengamos que dar un salto atrás para retomar el hilo que aquí dejamos y que habrá de conducirnos a resultados extraordinarios.

IV

LO INTERMINABLE

No es lo mismo ser que estar en vías de ser. Se considera que estar en vías de ser es una forma deficiente de ser, una especie de no-ser, (no-ser-todavía). Los griegos, que a todo cuanto hallaban y pensaban le ponían nombre, le llamaron **ser potencial**, contraponiéndolo así a lo que es **ya**, y que llamaron **ser actual**. Yo, por ejemplo, tengo un ser actual, pero el cadáver que seré sólo es potencialmente; está en vías de ser, es un cadáver haciéndose.

El ejemplo quizá no sea muy bueno, porque mi cadáver, que no es todavía, se actualizará tarde o temprano con toda seguridad, en tanto que hay muchas cosas que están en vías de ser y que no serán nunca. Es decir, la potencia no tiene por qué realizarse necesariamente. Uno no puede ser todo lo que puede ser. Muchas de nuestras potencialidades están condenadas a quedar dormidas en el sótano de nuestro ser, y a morir con nosotros sin haber visto la luz de la realidad actual.

Pues bien, al hilo de este par de conceptos, los griegos, y en particular Aristóteles, distinguieron entre el **infinito actual** y el **infinito potencial.** Una cosa es infinita potencialmente si tiene la capacidad, la potencia, de crecer indefinidamente, de no terminar nunca, de ser un progreso indefinido. Por eso quiero llamarlo **interminable** o **perpetuo**. En tanto que lo actualmente infinito lo es ya, no tiene que crecer ni nada para llegar a serlo. Es infinito ya, y no como lo interminable que es un infinito haciéndose. Los capítulos anteriores, y los próximos a seguir, tratan, por supuesto, del infinito actual o "consumado", como decía Cantor. Pero veamos por qué no nos interesa mayormente lo interminable, y por qué no queremos llamarlo infinito potencial.

En primer lugar, porque ni siquiera potencialmente lo es. Si un objeto está en vías de hacerse infinito, significa que no lo es, luego es finito. Y si es finito, está bien equivocado si cree que creciendo o progresando va a ser infinito. Sólo lo sería después de una eternidad. Entre tanto, no está dando ni un solo paso hacia ello. Ese camino, el del engrandecimiento y el progreso, está bloqueado por una distancia infinita que ni el progreso indefinido puede salvar, a menos que se realice infinitamente. Llamarle infinito potencial a lo interminable supone que se ha cometido el error básico, pero tradicional, de confundir lo infinito con lo grande, o por lo menos con la capacidad de hacerse indefinidamente grande.

Además, el error está reforzado por el hecho de que lo interminable no acaba nunca, contrariamente a lo finito, que comienza y acaba. Y se cree -otro error- que lo infinito debe carecer de límites, por lo menos por delante, porque se lo ha confundido con lo grande. Es verdad que lo interminable no termina, pero lo infinito puede terminar perfectamente. Todos los ejemplos que han aparecido, menos el de los naturales, son de objetos infinitos con comienzo y con fin. Más adelante veremos que entre el 0 y el 1 hay un espacio infinito densamente poblado de fracciones, y sin embargo este espacio comienza en el 0 y termina en el 1. Ser interminable no es, pues, condición necesaria para lo infinito.

Ahora bien, si lo interminable no es infinito, debe ser finito. Y esto parece contradictorio, porque da la impresión de que se está pensando que algo finito carece de término. No hay contradicción. Lo interminable es finito en cualquier instante, pero está siempre en condiciones de cambiar, de progresar, eso sí, a otro estado finito. Lo que sí es infinito es el conjunto de estados por los que lo interminable puede pasar. Esto significa que desde el momento en que encuentro un objeto interminable, estoy, y estaré siempre, ante un objeto finito, por mucho que lo siga en sus transformaciones, pero dentro de un conjunto infinito de tales objetos. Lo interminable es lo eternamente finito, lo infinitamente finito.

Por ejemplo, contar los números naturales es un proceso interminable, en todo instante estoy ante un número finito, porque todos los naturales lo son, pero el número de números naturales, que no es un número natural, es infinito. La vida de los dioses en el Olimpo, y quizá la de los cristianos en el paraíso de Jehová, es interminable, no infinita. Aunque vivan siempre, eso no importa; aunque no mueran nunca. En cualquier instante han vivido mucho, años, siglos, milenios, todo lo que se quiera, pero nunca una eternidad, un infinito tiempo. A menos, claro está, que se la hayan ganado amando, sufriendo o incluso fumándose un cigarrillo. En cualquier caso, cometiendo un acto equivalente al todo del que forma parte. Pero para lograr esa eternidad no es necesario morirse e irse al cielo; ni siquiera vivir mucho tiempo; en una semana, en un momento privilegiado cabe. "La otra vida, sí, -decía un poeta-, pero dentro de ésta". Por eso los gnósticos, esos maravillosos y soberbios herejes del siglo II de nuestra era, despreciaban a Dios y a la inmortalidad que se sirve en el cielo. Aspiraban a la vida eterna.

Hegel, con esa confianza y familiaridad que sólo da la convivencia cotidiana, le llamó "malo" al infinito potencial, y "bueno" al actual. Y también, con más acierto y menos resentimiento, infinito **falso** e infinito **verdadero**, respectivamente.

Cuando en el análisis matemático se habla de infinito, generalmente se trata del malo, de lo interminable, y se lo representa como un ocho acostado: ∞ . Por ejemplo, considérese la fración $1/x$. Si sustituímos la x por números pequeños menores que 1 pero mayores que 0, $1/x$ se hace grande. Cuando sustituímos la x por $1/2$, se obtiene 2. Cuando $x = 1/3$, la fracción original se hace 3. $1/x$ va aumentando conforme x desciende a 0. Es decir, $1/x$ es tan grande como se lo quiera, pues sólo se necesita hacer que x sea lo suficientemente pequeño. Decimos entonces que el límite de $1/x$, conforme x tiende a 0, es infinito (malo): $\lim_{x \to 0} 1/x = \infty$. El infinito de los analistas pues, generalmente es un límite, una capacidad de progresar indefinidamente. Pero, por lo mismo que es un progreso indefinido, no llega nunca, no es infinito nunca.

También se habla en análisis de $-\infty$, que es el mismo progreso indefinido que comentamos arriba pero concebido como regreso: la capacidad de hacerse grande negativamente. Igualmente se hablaba antes de lo **infinitesimal**, lo infinitamente pequeño, queriendo sin embargo indicar la capacidad (de nuevo el infinito malo) de disminuir interminablemente, pero hacia el 0, no en el sentido de los números negativos.

Termino con dos ejemplos que ilustran, resumen y motivan la distinción que se ha hecho entre lo infinito y lo interminable. Una hipotética máquina de movimiento perpetuo trabajaría interminablemente. Cada vez habría trabajado más. En cambio, la máquina con la que un Dios hipotético hizo los números naturales, trabajó infinitamente. Por último: Un muerto no está cada vez más muerto. A los cinco minutos de morirse está tan muerto como el que tiene cinco siglos de estar muerto. Esto significa que la muerte no es interminable, es infinita, eterna.

V

INFINITO ENUMERABLE

No es gratuito el que a los números naturales se les llame "naturales". Lo son en la misma medida en que lo es el lenguaje. El papel que juegan en la cultura trasciende con mucho el ya vasto campo de la matemática, de la misma manera como desborda el alfabeto a la literatura. Los niños aprenden a contar antes de poder hablar con claridad. Y sin embargo, justamente por ese carácter básico y fundamental, son muy difíciles de entender. El lector quedará asustado cuando en un capítulo próximo definamos el número 5, eso que conoce y maneja desde la infancia. Krönecker, un gran enemigo de Cantor, decía irónicamente, pero con un fondo de seriedad, que el hombre había creado las montañas, los soles, el universo entero, pero que "los números naturales los hizo Dios".

No es, entonces, extraño que el conjunto infinito de los naturales desempeñe un papel muy importante en la teoría que desplegamos, y que convenga distinguir con un nombre todos aquellos conjuntos que son coordinables con una parte de los naturales o con el conjunto entero de ellos. Se los va a llamar conjuntos **enumerables.**

Por supuesto, todos los conjuntos finitos son enumerables, pues son coordinables con algún segmento inicial débil, parte de los naturales: Dado un conjunto finito cualquiera, puedo poner en fila india, uno detrás del otro, los elementos que lo constituyen y darle un número natural a cada uno, enumerarlo. Al último le corresponderá el número natural a la cabeza del segmento inicial. Algunos objetos finitos, como el sol, pueden ser muy grandes, pero eso no impide que no pueda –al menos en teoría– contar sus elementos, cada uno de sus átomos y aun sus electrones.

Por otra parte, si para enumerar un conjunto necesito todos los naturales, a ese conjunto, que es enumerable, le vamos a llamar **infinito enumerable**, porque, según demostraremos después, un conjunto tal resulta que satisface la definición de infinito. En otras palabras, que podremos enumerar también conjuntos infinitos. Por lo menos algunos. Ya veremos cuáles no.

Por ejemplo, (es una pequeña variación del de Galileo), considérese el conjunto de los naturales pares, es decir, aquellos que puedo partir por la mitad, como 2, 4, 6, 8, 16, etc. . . . Es un conjunto infinito, porque no existe el par último. Dado un par cualquiera, por muy grande que sea, puedo hacer otro mayor. Sencillamente multiplico por dos el que se me ha dado como frustrado candidato a último. El proceso de generar pares es interminable, y eso significa, según vimos anteriormente, que aunque cada par es finito, estamos moviéndonos dentro de un conjunto infinito. Pues bien, a pesar de ser un conjunto infinito, puedo enumerarlos a todos poniéndole un número natural distinto a cada uno. Al 2 le pongo el 1, al 4 el 2, al 6, el 3, etc. . . .como lo indica la tabla siguiente:

2	4	6	8	10 . . .	n . . .
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
1	2	3	4	5 . . .	n/2 . . .

En la primera fila aparecen los pares ordenados según tamaño en fila india, y debajo de cada uno el natural que le corresponde.

Repárese en que los he enumerado a todos de un solo golpe y sin consumir tiempo. Se me puede preguntar por cualquier par, que en seguida podré decir el número que le ha tocado. Por ejemplo, al

2148 le corresponde el 1074. Sólo tengo que dividir por dos el par por el que se me pregunta. En el conjunto de los pares, pues, tenemos un ejemplar de algo infinito enumerable. Este capítulo está principalmente dedicado a conjuntos infinitos enumerables. Después vendrán los innumerables.

No es inmediato el que todo conjunto coordinable con el conjunto entero de los naturales, infinito enumerable, sea infinito. Esto hay que demostrarlo, y es lo que hacemos enseguida, pero de un modo más general. Vamos a probar algo que puede parecer muy obvio al que no tiene imaginación, a saber, que todo conjunto coordinable con un conjunto infinito, es infinito.

Supóngase que tenemos dos conjuntos, A y B, donde A es coordinable con B y B es infinito. Queremos probar que A también es infinito.

Si A es coordinable con B, podemos proyectar A en B de forma tal que a cada elemento de A le corresponda un elemento único de B. Como por hiótesis B es infinito, es coordinable con una parte suya que llamamos B'. Como hemos calcado A en B y B en B', tenemos a A calcado en B', (transitividad de la coordinabilidad). Ahora bien, como B es coordinable con A, (porque A es coordinable con B y la coordinabilidad es simétrica), podemos proyectar B sobre A. En esta proyección lanzamos a B' sobre una parte A' de A. Como teníamos calcado todo A en B' y ahora calcamos B' en A', hemos proyectado, (de nuevo por la transitividad de la coordinabilidad), todo A en A'. Esto significa que A es coordinable con una parte suya A'. Luego, por definición, es infinito. Y eso es lo que nos propusimos demostrar.

Las proyecciones o calcos pueden, quizá, visualizarse mejor mediante el siguiente diagrama:

$$A \rightarrow B \rightarrow B' \rightarrow A'$$

Una aplicación interesante de este teorema es que nos permite afirmar que la parte de un conjunto infinito por la que sabemos que ese conjunto es infinito, es también infinita. Es decir, el conjunto de los cuadrados perfectos, en el ejemplo de Galileo, es tan infinito como el todo del que forma parte. De igual manera, el beso que hace infinito a un amor, es infinito él mismo. Hay que reconocer que este es un resultado muy justo. En toda prueba, pues, de la infinitud de un conjunto, hay dos infinitos. El del conjunto cuya infinitud se demuestra, y el de la parte del conjunto coordinable con él.

Otra aplicación inmediata es ésta: Todo conjunto infinito contiene una cantidad infinita de partes infinitas. Porque si un conjunto A es infinito, contiene una parte A' con la cual es coordinable; esa parte A', en virtud del teorema que comentamos, es también infinita, luego contiene a su vez una parte A'' con la cual es coordinable, que también es infinita. Esta cadena de partes infinitas de A no termina, luego es infinita. El teorema puede que sea obvio, pero no así sus implicaciones, desde luego.

Bertrand Russell cita, para ilustrar este punto, el caso de un hipotético mapa de Inglaterra hecho sobre terreno inglés. Como en el mapa se registra todo cuanto hay en el terreno inglés, debe también estar registrado el mismo mapa. En este mapa dentro del mapa debe de estar también representado todo el suelo inglés, y en consecuencia una imagen aún más pequeña del mismo mapa. Y así indefinidamente.

Un caso particular del mismo teorema es cuando N, el conjunto de los naturales, toma el papel de B. Como sabemos que N es infinito, el teorema dice que todo conjunto coordinable con N, (infinito enumerable), es infinito. Es una pena que este enunciado no sea más impresionante: Todo conjunto infinito enumerable es infinito. De ahora en adelante, si podemos ordenar los elementos de un conjunto en fila india de manera que haya un primer elemento y que cada elemento tenga un sucesor inmediato y que la fila no termine, sabremos que el conjunto es infinito enumerable, y en consecuencia infinito

Arriba demostramos que todo conjunto infinito contiene una cantidad infinita de partes infinitas. Luego, en particular, N contiene una cantidad infinita de partes infinitas. Algunas de ellas son muy conocidas. Por ejemplo, (a) la parte formada por los naturales pares; (b) la formada por los naturales impares; (c) la formada por los números primos. (Los números primos son aquellos naturales que pueden dividirse de forma tal que el resultado sea un entero, sólo por sí mismo y por 1. Se considera que el 1 no es primo).

(a)	2	4	6	8	10	12	14	...
(b)	1	3	5	7	9	11	13	...
(c)	2	3	5	7	11	13	17	...

Igualmente, la parte (d) formada por los cuadrados perfectos; la parte (e) formada por los cubos perfectos; etc. . .

(d)	1	4	9	16	25	36	49	...
(e)	1	8	27	64	125	216	343	...

. . . .

. . . .

. . . .

Igualmente, cualquier conjunto de naturales a partir de uno dado. Por ejemplo, (f) a partir del 23; (g) a partir del 24; etc. . . .

(f)	23	24	25	26	27	28 . . .
(g)	24	25	26	27	28	29 . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Como en las dos últimas colecciones las filas no terminan por abajo, el conjunto de ellas es infinito enumerable. Luego N contiene una cantidad infinita enumerable de partes infinitas enumerables.

Si lo anterior no impresiona porque las partes de N que hemos señalado tienen elementos en común, podemos dar un ejemplo, que resultará muy importante, en el que se divide a N en un conjunto infinito enumerable de partes infinitas enumerables, ninguna de las cuales tiene elemento en común con ninguna otra. En efecto, considérese el siguiente diagrama, en donde las flechas indican el sentido que se ha seguido para ir poniendo los números:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & \to & 2 & & 6 & \to & 7 & & 15 & \to & 16 & & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
3 & & 5 & & 8 & & 14 & & 17 & & 27 & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
4 & & 9 & & 13 & & 18 & & 26 & & 31 & & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
10 & & 12 & & 19 & & 25 & & 32 & & 42 & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
11 & & 20 & & 24 & & 33 & & 41 & & 50 & & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & \swarrow & & \nearrow & \swarrow & & & & &
\end{array}
$$

. . . .

. . . .

. . . .

Como ni las filas (horizontales) ni las columnas (verticales) terminan, tenemos que cada fila es infinita enumerable, y que hay una cantidad infinita enumerable de filas, puesto que están, ellas también, en fila india. El conjunto de todos los números que aparecen en el cuadro del cual nuestro diagrama es sólo una de sus esquinas, es, por supuesto, N. Con esto hemos hecho la división que queríamos.

Este diagrama nos permite generalizar un método para dividir un conjunto infinito enumerable en una cantidad infinita enumerable de partes infinitas enumerables sin nada en común entre ellas. Sencillamente tomamos el conjunto infinito enumerable y lo coordinamos con N ya dividido según el esquema de arriba: el resultado es lo que buscábamos.

Podemos hacer otra cosa pero en sentido opuesto: Unir una cantidad infinita enumerable de conjuntos infinitos enumerables diametralmente distintos entre sí, sin nada en común, y el resultado sigue siendo un conjunto meramente infinito enumerable. No ha aumentado ni un ápice. Esta afirmación es interesante porque, según veremos después, hay conjuntos infinitos que ya no son enumerables. La unión la podemos hacer así: Cada conjunto infinito enumerable lo coordinamos con una de las filas del diagrama. Como contamos con una cantidad infinita enumerable de estas filas, no importa que nos den una cantidad infinita enumerable de estos conjuntos. El resultado de unirlos todos está automáticamente enumerado.

Si nos dieran sólo un número finito de conjuntos infinitos enumerables, procedemos de la siguiente forma: Coordinamos uno con el conjunto de los pares naturales, y otro cualquiera con el de los impares naturales. Como la unión de estos dos conjuntos, ambos infinitos enumerables, es el de los naturales, la unión queda enumerada. Coordinamos ahora esta unión, infinita enumerable, con el conjunto de los pares naturales, y un tercer conjunto con los impares naturales. Volvemos a unirlos: tenemos otra vez un conjunto infinito enumerable. Continuamos este proceso hasta agotar los conjuntos dados: el resultado final será un conjunto infinito enumerado. En resumen: la unión enumerable, finita o infinita, de conjuntos infinitos enumerables, es infinita enumerable.

Si, por otra parte, los conjuntos son finitos pero la unión es infinita enumerable, el resultado es infinito enumerable, puesto que, ordenados en fila india los elementos de cada conjunto finito e igualmente cada conjunto finito, tenemos a todos los elementos ordenados en una fila india que no termina. Pero si los conjuntos y la unión son finitos, el resultado es finito. Porque dados dos conjuntos finitos, coordinables cada uno con un segmento inicial débil de los naturales, la unión de ambos será coordinable con el segmento inicial débil determinado por la suma aritmética de los dos naturales, siempre un natural, a la cabeza de los segmentos. Resumiéndolo todo nuevamente: La unión enumerable (finita o infinita) de conjuntos enumerables (finitos o infinitos) es enumerable (finita o infinita).

Un ejemplo nos ayudará a ver cuán increíble es lo que estamos diciendo. Supóngase que tenemos un balde infinito enumerable, lleno de agua hasta los bordes. Vaciamos en él otro balde igualmente infinito enumerable e igualmente lleno. El balde original no se desborda. Vuelvo a repetir la hazaña. Lo mismo. La repito una cantidad infinita enumerable de veces. Lo mismo. Del balde original no se ha desbordado ni una sola gota.

Lo que hemos dicho de la unión es igualmente válido para la resta o disminución. Dado un conjunto inifinito enumerable cualquiera, le puedo quitar una cantidad enumerable, finita o infinita, que tendré todavía un conjunto infinito enumerable. Lo infinito, pues, puede darse el lujo de ser infinitamente generoso, sin que sus dádivas le merme en lo más mínimo.

Para el caso finito, es decir, cuando le quito un número finito de elementos a un conjunto infinito, la razón de esto es bien sencilla: Lo único que tengo que hacer es pedirle a los elementos del conjunto infinito que "cierren filas" cuando se les quita un número finito de elementos. Seguirán estando pareados con los naturales.

El caso infinito es más delicado. Desde luego, puedo quitarle una cantidad infinita enumerable: Lo coordino con los naturales y le quito los que han quedado pareados con los impares naturales, por ejemplo. Repitiendo este mismo proceso, puedo quitarle una cantidad infinita enumerable de partes infinitas enumerables, y el resultado final será que tengo aún un conjunto infinito enumerable exactamente como al principio. O también de esta otra forma: Lo coordino con los naturales ordenados de acuerdo con el último diagrama y le quito todas las filas menos una cualquiera. El resultado es el mismo: un conjunto que sigue siendo infinito enumerable.

Pero hay que tener cuidado si queremos que el conjunto original siga siendo infinito cuando le pegamos estos mordiscos infinitos, porque si no me guío por un diagrama como el anterior o por un proceso como el que presentamos, puedo obtener un resultado finito. Por ejemplo, si al conjunto de los naturales, que es infinito enumerable, (por la reflexividad de la coordinabilidad), le quito todos los números naturales mayores que 3, que también es un conjunto infinito enumerable, el resultado es un conjunto bien finito de sólo 3 elementos.

En otras palabras, se puede restarle a un conjunto infinito enumerable una cantidad infinita enumerable de elementos y seguir teniendo un conjunto infinito enumerable, aun repitiendo esta operación una cantidad infinita enumerable de veces, pero no toda y cualquier resta da este buen resultado. Hacia arriba, todo lo que se quiera, que no podremos trascender lo infinito enumerable dando saltos enumerables, finitos o infinitos, una cantidad enumerable de veces; pero hacia abajo hay que tener cuidado, no sea que la confianza que nos da lo infinito nos haga perderlo todo.

Dicho con un poco de poesía, porque después de todo la poesía se lo merece: Un hombre que ama infinitamente, ama lo mismo que si amara infinitamente más de lo que ama. E igualmente, si amara infinitamente menos de lo que ama, podría sin embargo seguir amando lo mismo.

Para el que se haya sorprendido, vaya la advertencia de que estamos apenas entrando en el mundo increíble de lo infinito. Lo más interesante es que vamos embarcados en la razón. Alguien ha dicho, a propósito de estas cuestiones, que "el mundo de la razón es más más extraño que el de la fantasía".

Hay otros conjuntos que a primera vista parecen más numerosos que el conjunto de los naturales y que sin embargo no son más que infinitos enumerables. Por ejemplo, el conjunto de los números enteros. Los enteros son todos los naturales, más el 0, más todos los enteros negativos:

. . . . . .-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,. . . . . .

A pesar de que no hay un primer entero más pequeño que todos, (la fila no termina pero tampoco comienza), los podemos poner en fila india, con un nuevo orden distinto del usual, así:

0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4,. . . .

En consecuencia, el conjunto de los enteros, que contiene a los naturales y a muchos otros números además, es infinito enumerable. Es decir, hay la misma cantidad de enteros que de números naturales. Seguramente que un profano de esta teoría no vacilaría en decir que hay el doble de cantidad de números enteros que de naturales.

Y ahora, para terminar este capítulo, una sorpresa: Se les llama **números racionales** a todos aquellos que pueden ser representados como una fracción p/q, donde tanto p como q son enteros y q es diferente de 0. 1, por ejemplo, 2, 3, 4,. . . . todos los naturales son racionales, porque se los puede representar como fracciones del tipo exigido:

$$1/1, 2/1, 3/1, 4/1, \ldots$$

El 0 también es racional: Se lo puede escribir 0/1. No importa que el numerador sea 0, con tal de que no lo sea el denominador. Todos los enteros negativos: -1, -2, -3, -4, . . . son racionales. Se los puede escribir:

$$-1/1, -2/1, -3/1, -4/1, \ldots$$

Pero hay muchísimos más:

$$1/2, 7/8, 1/100, -3/48, \ldots$$

Solamente entre el 0 y el 1 hay una cantidad infinita enumerable de racionales:

$$1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots\ldots, 1/n, \ldots$$

En otras palabras, los racionales parecen infinitamente más numerosos que los enteros, por no decir nada de los naturales. Y sin embargo vamos a demostrar que son infinito enumerable, es decir que hay tantos, no más, racionales que naturales.

La demostración de esto parece imposible, además, porque no hay forma de ponerlos en fila india con el orden usual. Los racionales están muy apretados entre sí. Son lo que se dice **densos**. Esto es, entre dos racionales cualquiera, por muy juntos que estén, siempre hay uno de por medio. Dicho aún de otra manera, ningún racional tiene un sucesor inmediato. Entre cada racional y el candidato a su sucesor inmediato, hay uno de por medio. Para encontrar un racional entre cualquier par de racionales, basta sumarlos y dividir el resultado por 2. Por ejemplo, entre el $1/4$ y $1/5$ existe el racional

$$\frac{1/4 + 1/5}{2} = 9/40$$

Pues bien, este conjunto puede ser ordenado en fila india. Por supuesto, no con el orden usual de tamaño. Con este orden no existe un primer racional ni el racional sucesor inmediato de otro. La forma en que Cantor logró, a pesar de todo, ordenarlos en fila india es realmente extraordinaria.

Primero considérese el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1/1 & \to & 2/1 & & 3/1 & \to & 4/1 & & 5/1 & \to & 6/1 & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
1/2 & & 2/2 & & 3/2 & & 4/2 & & 5/2 & & 6/2 & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
1/3 & & 2/3 & & 3/3 & & 4/3 & & 5/3 & & 6/3 & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
1/4 & & 2/4 & & 3/4 & & 4/4 & & 5/4 & & 6/4 & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
1/5 & & 2/5 & & 3/5 & & 4/5 & & 5/5 & & 6/5 & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

La primera fila, como se ve, contiene todas las fracciones con 1 de denominador. La segunda fila contiene todas las fracciones con 2 de denominador. Etc. . . Los numeradores, por otra parte, aparecen con el orden usual de los naturales en cada fila. Siguiendo ahora el sentido de las flechas, (es el mismo que apareció en un diagrama anterior), y dejando aparte los números que ya han aparecido, podemos ordenar las fracciones así:

1/1, 2/1, 1/2, 1/3, 3/1, 4/1, 3/2, 2/3, 1/4, ...

Es decir:

1, 2, 1/2, 1/3, 3, 4, 3/2, 1/4, .

Porque 1/1= 1, 2/1= 2, etc. . . Obsérvese además que se ha prescindido de 2/2 porque es igual a 1, y el 1 ya había aparecido.

Ahora, si comenzamos con el 0 y alternamos cada fracción que obtenemos de nuestro cuadro con su negativo, así:

0, 1, -1, 2, -2, 1/2, -1/2, 1/3, -1/3, 3, -3, 4, -4, 3/2, -3/2, . . .

¡Tenemos ordenados todos los números racionales en fila india¡ Luego el conjunto de ellos es infinito enumerable.

Rogamos al lector que haga una pausa, por muy clara que haya visto la demostración, para meditar sobre ella. Tomarla sin sorpresa, con naturalidad, es sintomático de que nos estamos perdiendo su alcance más hondo.

VI

EL DERECHO DE ELEGIR

Ante la terca insistencia del infinito enumerable podríamos sospechar, de no estar ya advertidos de lo contrario, que todo conjunto infinito es infinito enumerable. Esto no es cierto. Ya veremos que los niveles del infinito son infinitos. Pero algo de especial debe haber en el infinito enumerable. En efecto, lo hay. Lo que tiene de especial es que todo conjunto infinito contiene una parte infinita enumerable. Hemos dicho **todo** conjunto inifinito, y no sólo los infinitos enumerables, que ya vimos contienen no solamente una sino infinitas. La recíproca también es cierta: Si un conjunto contiene una parte infinita enumerable, entonces es infinito. Las dos afirmaciones pueden resumirse así: Un conjunto es infinito si y sólo si contiene una parte infinita enumerable. Y esto equivale a decir que lo infinito enumerable es, en el mundo de lo infinito, lo más modesto, en el sentido de que es parte de todo otro infinito y de que no posee, como parte, a ningún otro. (Porque si lo contuviera también sería enumerable). Todos lo contienen a él y él sólo se contiene a sí mismo.

Que un conjunto que contiene una parte infinita enumerable es infinita, se lo puede ver muy sencillamente: La parte infinita enumerable es infinita, y en consecuencia no es coordinable con ningún segmento inicial débil de los naturales. Luego el conjunto en cuestión tampoco será coordinable con ningún segmento inicial débil de los naturales, si no lo es ni siquiera una parte suya. Luego es infinito.

La demostración de que un conjunto infinito contiene siempre una parte infinita enumerable es igualmente sencilla, pero echa mano a una hipótesis muy fuerte que necesita ser comentada.

La prueba se desarrolla así: Dado un conjunto infinito cualquiera, puedo quitarle un elemento. Uno cualquiera, da lo mismo. El resultado es que el conjunto sigue siendo infinito. Porque si al quitarle un elemento lo hiciera finito, eso querría decir que es coordinable con un segmento inicial débil cuyo número de cabecera es, digamos, k. Pero entonces el conjunto original sería coordinable con el segmento inicial débil cuyo número de cabecera es k + 1, lo que significa que es finito, contradiciéndose la hipótesis de que partíamos de un conjunto infinito.

Al conjunto original menos un elemento, que sigue siendo infinito, le podemos quitar otro elemento. Otro cualquiera, da lo mismo. El resultado es aún infinito por exactamente las mismas razones anteriores. En general, después de haber sacado un elemento, podremos siempre sacar otro. Y esto nos permite afirmar que podemos sacar tantos elementos como números naturales.

La razón de esto último es lo que se conoce con el nombre de **inducción matemática,** que puede explicarse así: Supóngase que tenemos dos filas infinitas de fichas de dominós, todas paradas y relativamente cercanas entre sí. La primera fila, sin embargo, está rota en alguna parte, o algún par de fichas están demasiado distanciadas. De manera que si tumbo la primera, habré tumbado sólo hasta el sitio en el que la cadena se interrumpe. La otra fila, en cambio, está uniformemente ordenada. Si tumbo la primera ficha de esta segunda serie, y el proceso no consume tiempo, las habré tumbado a todas, aunque haya una cantidad infinita (enumerable, puesto que están en fila) de ellas. Por eso, para probar que todas las fichas están caídas, sólo tengo que probar estas dos cosas: Primero, que la primera está caída. Segundo, que si una de ellas cualquiera cae, cae también la siguiente. Este segundo paso se lo requiere para asegurarnos de que la fila no está interrumpida, como la primera fila del ejemplo.

Pues bien, exactamente este es el caso que teníamos más arriba. Podemos quitar un primer elemento. Ese es el primer paso. Segundo: si podemos quitar un enésimo elemento, podemos también quitar el enésimo más uno. Conclusión: podemos quitar tantos elementos como naturales, concebidos ahora como primero, segundo, tercero, etc. . . .

Con esto queda terminada la prueba, pues hemos formado un conjunto, con los elementos que quitábamos, parte del conjunto original, y que es infinito enumerable. Todo conjunto infinito, pues, contiene una parte infinita enumerable.

Pero, ¿dónde está la "hipótesis fuerte" que habíamos anunciado? Seguramente que el lector no se ha apercibido de ella, al igual que muchos grandes matemáticos que la usaban sin darse cuenta. Volvamos a la prueba. Decíamos: "Tomamos un elemento cualquiera del conjunto infinito. . ." No se daba criterio para saber cuál debía tomarse, ni cómo. Obviamente no se trata de tomarlo con la mano. No hay mano en el dominio conceptual –no material– del infinito. Sin embargo toda la prueba descansa en la posibilidad, ésa es la hipótesis fuerte, de que podemos elegir un elemento de un conjunto infinito. A la hipótesis de que podemos hacerlo, se le llama **axioma de elección**. Parece una tontería a primera vista. El problema es tratar de ver eso como problema. Y sin embargo, el axioma de elección no sólo es en sí mismo violento, sino que además está preñado de unas consecuencias extraordinarias, increíbles.

Al nivel de lo finito, no hay ninguna dificultad. Se puede demostrar, por inducción matemática precisamente, que dado un conjunto finito podemos siempre elegir uno de sus elementos. Incluso al nivel de lo infinito enumerable, porque podemos elegir el primer elemento de la filia india, o el elemento que ocupa el puesto 43, por ejemplo. Podríamos pensar que tampoco hay dificultad en ningún otro nivel de lo infinito, pues como se ha demostrado que todo infinito contiene una parte infinita enumerable, podemos elegir el primer elemento de esa parte. Pero, da lástima decirlo, sucede que para demostrar que todo infinito contiene una parte infinita enumerable, tenemos que contar ya con el axioma de elección. Sería demostrar lo mismo con lo mismo, es decir, un círculo vicioso, una culebra lógica que se muerde la cola.

Considero que lo extraño que tiene el que este principio sea extraño radica en nuestra entrañable costumbre de tener cuerpo y de vivir en un mundo material en el que las posibilidades del cuerpo son finitas: Elijo la primera camisa que cojo del armario, la primera pluma que vea, la palabra de la Biblia en la que cae el dedo, el primer amigo que me encuentro. O, en todo caso, la mujer más bella, el amigo más fiel, el lápiz más largo, el producto más barato. Puedo elegir siempre sin mayor dificultad. Para el mundo de lo finito no se necesita del axioma de elección. Pero es una extralimitación pensar que podemos hacer lo mismo en un horizonte infinito donde las cosas no tienen por qué estar ordenadas de ningún modo ni tengo la posibilidad de verlas, tocarlas, tropezarme con ellas.

Por ejemplo: despierto y comienzo a pensar. ¿Con qué idea comienzo? Porque hay una cantidad infinita de ideas. Por lo menos cada número natural es una idea y hay una cantidad infinita de números naturales. ¿Cómo elijo la primera idea? ¿Con qué concepto desencadeno el proceso de pensar? Aunque la cantidad de ideas posibles fuese sólo infinita enumerable, no se ve forma de enumerarlas para poder comenzar por la primera o la décimo cuarta, por ejemplo. Por otra parte, desgraciadamente no puedo meter la mano y sacar una idea cualquiera como si el pensamiento fuese una gaveta del armario y las ideas camisas. Este problema puede parecer trivial, puramente teórico, porque no lo hemos tenido nunca. El cuerpo siempre nos saca del apuro. En el momento de abrir los ojos veo una ventana, una puerta. . . , y ya puedo pensar en eso. El cuerpo me ha elegido mi primera idea, me ha puesto en marcha al pensamiento, la vida del espíritu. O también pude haber oído un ruido que me haga patente, en un mundo infinito de ideas, la idea del reloj despertador. O puedo sentir hambre. Me sobran motivos para comenzar a pensar, pero sólo porque tengo la dicha de tener cuerpo. ¿Qué tal, sin embargo, si un día despierto sin cuerpo, pensamiento puro? ¿Qué tal si un día amanezco convertido en ángel? El aprieto es peor de aquel en el que se vió el personaje de Kafka que se convierte de la noche a la mañana en cucaracha. Que no se diga que puedo pensar en la primera idea que se me ocurra. Justamente lo que está problematizado es la posibilidad de esa ocurrencia. Que no se diga tampoco que es un problema para ángeles solamente, porque el matemático, el filósofo, el poeta, que han de pensar en abstracto, tienen que acostumbrarse a pensar y sentir como los ángeles. El matemático debe poder contar y sumar sin dedos, el físico debe saber qué es un color sin verlo, el poeta debe amar, sufrir, morir, sin corazón, sin que le dé un pálpito de más. Y para poder moverse en esa región de ideas y sentimientos abstractos, se requiere del axioma de elección.

Por razones subconscientemente humanistas, de un humanismo falso tipo Renacimiento, se considera de muy **mal gusto** apoyarse en el axioma de elección. Se prescinde de él en la medida de lo posible, aun cuando eso implique un derrotero de demostración más largo y difícil. En la teoría del infinito, sin embargo, el axioma es absolutamente imprescindible. Algunos autores prefieren negar todo el aporte de Cantor y la teoría del infinito antes de caer en la necesidad del axioma. ¡Lo que es la soberbia de la equivocada finitud humana!

La cosa no termina allí. Aceptado el axioma de elección, se desprende inmediatamente algo verdaderamente notabilísimo. Antes de decirlo, una definición previa.

Todos tenemos una idea intuitiva de lo que es en general **orden**. Un conjunto puede ser ordenado de diversas formas. Por ejemplo, una biblioteca puede ordenarse de acuerdo con los temas de los libros, o de acuerdo al orden alfabético del nombre de sus autores, o aun de acuerdo al tamaño de los libros. Los naturales, por ejemplo, están ordenados con un orden muy conocido, el de menor a mayor. Igualmente los enteros, los racionales. Pero hay una diferencia muy interesante entre el orden de los naturales, por una parte, y el de los enteros y racionales por otra: Los naturales tienen un primer elemento, el 1, en tanto que ni los enteros ni los racionales lo tienen. Pero además hay otra cosa, que tampoco se cumple con los enteros ni con los racionales, y es que toda parte de los naturales tiene un primer elemento. Pues bien, y ésta es la definición que queríamos, cuando un conjunto tiene primer elemento, y además, toda parte suya también la tiene, se dice que está **bien ordenado.**

Repárese en que ni los enteros ni los racionales están bien ordenados, por lo menos con el orden usual. No solamente no tienen primer elemento, como apuntábamos, sino que muchas de sus partes tampoco lo tienen. El conjunto de los pares negativos, por ejemplo, parte de los enteros, no tiene primer elemento. El conjunto de los racionales mayores que 0 y menores que 1, parte de los racionales, tampoco lo tiene. Cantor logró re–ordenar los enteros y los racionales de manera que fuesen coordinables con los naturales, y este orden bien artificial, que vimos anteriormente, sí es un buen orden. Pero nadie ha logrado ordenar bien el conjunto de los números reales, por ejemplo, que ya veremos más adelante cuáles son. Menos aún otros conjuntos infinitos de nivel superior al de los reales.

Pues bien, se puede demostrar, partiendo del axioma de elección, y esto es lo notabilísimo, que todo conjunto, por muy infinito que sea, puede ser bien ordenado. Cantor conjeturó este teorema, pero no fue demostrado sino hasta el año de 1904 por Zermelo. De allí que se le conozca como **teorema de Zermelo**. Su demostración, que es demasiado difícil para insertarla aquí, no dice cuál es esa relación de buen orden, únicamente afirma que existe. Es un teorema de existencia. Y esto es muy notable, sobre todo si tomamos nota de que, como decíamos más arriba, nadie ha logrado aún ordenar bien un conjunto infinito de orden medio, como el de los reales.

Llevando esto al terreno de lo personal, que es donde realmente retumban las cosas, lo anterior significa que hay manera de ordenar cualquier conjunto al que pertenezco, por ejemplo el de los hombres, e incluso el del universo entero, de forma tal que yo sea lo primero. Esto puede servir para los momentos de depresión. No importa que no sepamos cuál sea ese orden, es un consuelo saber que existe. O quizá no lo sea. Parece que entraña cierta responsabilidad, la obligación de buscarlo y el desconsuelo de no poder hallarlo.

Pero hay otra aplicación, menos humana pero más importante, del teorema de Zermelo: la generalización de la inducción matemática, la inducción infinita. Recuérdese que con la inducción matemática podemos afirmar que todos los elementos de un conjunto infinito enumerable tienen alguna propiedad. Pero nada más. No podemos hacer lo mismo con conjuntos más infinitos, por así decirlo, que el conjunto de los naturales. El teorema de Zermelo demuestra la legitimidad de una inducción que no se detiene en el conjunto de los naturales, va más allá, alcanza cualquier conjunto, aunque pertenezca a un nivel superior al de lo infinito enumerable.

El teorema de la inducción infinita dice así: Si el primer elemento de un conjunto bien ordenado goza de determinada propiedad, y se puede demostrar que si la gozan todos los elementos de un segmento inicial fuerte de ese conjunto, también la goza el elemento que determina dicho segmento, entonces la gozan todos los elementos del conjunto en cuestión. (Por segmento inicial fuerte de un conjunto, determinado por un elemento de ese conjunto, se entiende la colección de todos los elementos del conjunto que preceden al elemento dado, **sin incluir** a este elemento dado. Es sólo por este último detalle que se distingue del segmento inicial débil).

La demostración procede por reducción al absurdo del siguiente modo: Supóngase que el primer elemento de un conjunto dado A goza de una propiedad determinada, y que además, si la gozan todos los elementos de un segmento inicial fuerte de ese conjunto, también la goza el elemento que determina a ese segmento. Pensemos ahora, para caer en el absurdo, que existen algunos elementos del conjunto A que no gozan de la propiedad. Estos elementos forman una parte de A. Como A está bien ordenado, en virtud del teorema de Zermelo, la parte en cuestión tiene un primer elemento. Llamémosle p a este primer elemento. El segmento inicial fuerte determinado por p contiene sólo elementos de A que gozan de la propiedad, porque todos están fuera de la parte que contiene a los que no la gozan. Entonces, como todos los elementos de este segmento inicial fuerte gozan de la propiedad, también la goza el elemento p que lo determina. Pero este elemento que lo determina es el primero de la parte de los que no la gozan. Se ha llegado, así, a la contradicción de que p goza y no goza de la propiedad. Luego, si la hipótesis de que existen algunos elementos de A que no gozan de la propiedad nos ha hecho caer en el absurdo de la contradición, eso quiere, decir que la hipótesis es falsa. Luego es verdad que no existen elementos que no gozan de la propiedad. Luego, todos la gozan, que es lo que había que demostrar.

Ya veremos después, porque esto se pone cada vez peor, a dónde conduce lo que acabamos de demostrar. Por ahora, conviene tomar nota de una cosa en la que el lector seguramente reparará. En esta demostración, como en la mayoría de las que daremos más adelante, se procede por esa técnica de demostración que los lógicos llaman **reducción al absurdo**. ¿Qué significa el que al nivel de lo infinito casi todas las pruebas sean por reducción al absurdo? En esencia, una prueba por absurdo consiste en negar lo que se quiere demostrar y, partiendo de esa negación, desembocar en el absurdo. Desde el punto de vista lógico, es una técnica perfectamente legítima, a pesar de que quien está razonando por absurdo va en busca de una contradicción, de una falsedad, y no de una verdad.

Creo que este método de raciocinio es particularmente apto, y desde luego frecuente, en la investigación del infinito, porque a esas alturas las verdades son totalmente distintas de las terrestres. La mayoría, como habrá comprobado el lector, son curiosas, raras, desconcertantes. No podríamos reconocerlas. Estamos demasiado habituados al mundo, al cuerpo, a lo finito. Las falsedades, en cambio, son las mismas. Son los mismos absurdos. Todo esto independientemente de la observación de Pascal de que la naturaleza miserable y corrupta del ser humano lo dispone mejor para la mentira y el error que para la verdad.

VII

LA FUERZA DEL INFINITO

Para motivar el tema de este capítulo, vamos a iniciarlo presentando un conjunto infinito que no es enumerable, esto es, un conjunto **innumerable**, porque así se les va a llamar a todos aquellos que no son enumerables, es decir, que no son coordinables ni con los naturales ni con parte alguna de los naturales.

Está claro que todo conjunto innumerable es infinito, pues no es coordinable con ninguna parte de los naturales, ni en consecuencia con aquellas partes llamadas segmentos iniciales débiles. Para demostrar la innumerabilidad de un conjunto, hay que probar, pues, dos cosas. Primero, que es infinito. Segundo, que no es coordinable con el conjunto de los naturales.

Considérese nuevamente N, el conjunto de los números naturales, y llamémosle P(N) al conjunto de todas las partes posibles de N. Así, por ejemplo, el conjunto de los pares naturales, el de los impares naturales, el de los primos, el de los cuadrados perfectos, etc. . ., son todos partes de N, y en consecuencia elementos de P(N).. P(N), pues, es un conjunto cuyos elementos son a su vez conjuntos, es decir, es un conjunto de conjuntos. Vamos a demostrar que P(N) es innumerable. Después veremos otros conjuntos innumerables menos artificiales que éste.

Desde luego, P(N) es infinito, porque contiene una parte infinita enumerable, a saber, aquella parte cuyos elementos son las partes de N que contienen un solo elemento, es decir, un solo número natural. De estas partes unitarias, (así se las llama), hay tantas como números naturales, luego el conjunto de todas ellas, que es parte de P(N), es coordinable con N, y en consecuencia infinito enumerable. En virtud de un teorema del capítulo anterior, P(N), que como vemos contiene una parte infinita enumerable, es infinita.

Ahora hay que demostrar que P(N) no es infinito enumerable. Esto es un poco más delicado. Razonando nuevamente por absurdo, supóngase lo contrario de lo que queremos demostrar. Es decir, supóngase que P(N) sí es infinito enumerable, coordinable con N. Esto significa que sus elementos, partes de N, pueden ponerse en fila india, así:

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6,\ \ldots$$

Donde cada C es un parte de los naturales.

Ahora repárese en un detalle: El número 1 puede o no, no lo sabemos ni nos importa saberlo ser elemento de C_1. Lo mismo pasa con el 2, que puede o no ser elemento de C_2, y así en genera para todo número natural.

Construímos ahora una parte D de números naturales del siguiente modo. Incluímos el 1 en D si y sólo si 1 no está en C_1; incluímos el 2 en D si sólo si no es miembro de C_2; etc. . . En general, D contiene al natural n si y sólo si C_n no lo contiene. Obviamente, D es parte de los naturales, pero D es diferente de cada C. Es diferente de C_1 porque sólo uno de los dos conjuntos contiene al 1, y difieren, por lo menos, en ese detalle. Por la misma razón, D es diferente de C_2, y en general de todo C. Con esto hemos llegado a una contradicción y en consecuencia al final de la prueba. Efectivamente, por un lado se ha dicho que todas las partes de N están en fila india: C_1, C_2, C_3, ..., y por otro lado, tenemos una parte D que no está en esa fila. Luego la hipótesis de que podemos enumerar todas las partes de N es falsa. Luego es verdad que P(N) no es infinito enumerable. Pero es infinito. Luego es innumerable.

Como P(A) y P(B) son coordinables si A y B lo son, el resultado anterior puede generalizarse para cualquier conjunto infinito enumerable: El conjunto de sus partes posibles es innumerable.

Y ahora que ya sabemos que hay más de una clase de infinito, el enumerable y el innumerable, y ante la posibilidad de que entre los innumerables se puedan distinguir diversas clases, como será efectivamente el caso, es conveniente introducir aquí una relación que ordene los conjuntos infinitos. Con los finitos no hay problema, pues los podemos ordenar según su tamaño, es decir, según el número (finito) de elementos que contiene. Pero como sabemos que ser menor o ser más grande son relaciones que no funcionan al nivel de lo infinito, hay que buscarse otra relación. Cantor encontró una muy fecunda, que le llamó **fuerza** o **dominación**. Se le define así: Un conjunto A es más fuerte que uno B, o A domina a B, si B es coordinable con una parte de A.

Tómese nota de que se ha hablado de conjuntos cualquiera A, B, finitos o infinitos, y de que al nivel de lo finito la relación de fuerza coincide plenamente con la grandeza. Efectivamente, si A y B son conjuntos finitos, y A es más fuerte que B, eso equivale a decir que A es más grande que B, pues sólo siéndolo puede B ser coordinable con una parte de A. Por ejemplo, dos manos son más fuertes que una, la dominan, porque una mano es coordinable con una parte de las dos. Pero el concepto de fuerza, a diferencia de la grandeza, sigue funcionando, y hasta mejor, en los niveles infinitos. Por ejemplo, P(N) es más fuerte que N, pues en la demostración anterior vimos que N es coordinable con una parte de P(N). Y podemos ya sospechar que vamos a encontrar conjuntos aún más fuertes que P(N).

Un primer resultado muy natural de esta definición es que todo conjunto domina cualquiera de sus partes. En efecto, si A es un conjunto cualquiera y A' una de sus partes, como A' es coordinable con A', por la reflexividad de la coordinabilidad, A' es coordinable con una parte de A, luego A domina a A'

Otro resultado inmediato y también muy natural de la definición es que todo conjunto infinito es más fuerte que uno finito. En efecto, cualquier conjunto finito es coordinable con una parte de los naturales segmento inicial débil, y esa parte es coordinable con una parte del infinito enumerable que todo conjunto infinito contiene.

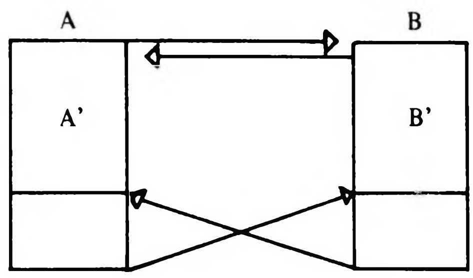
Otro resultado menos natural, pero que sin embargo esperábamos, es éste: Todo conjunto infinito es más fuerte que sí mismo, se auto–domina, puesto que un conjunto infinito es coordinable con una parte suya. Esto significa que, al nivel de lo infinito, la relación de fuerza es reflexiva.

También es transitiva, (pero esto también al nivel de lo finito), porque si A es más fuerte que B, y B más fuerte que C, A es más fuerte que C. La razón de esto es la transitividad de la coordinabilidad, porque si C es coordinable con una parte de B, y B es coordinable con una parte de A, C es coordinable con una parte de A.

La relación no es simétrica, en ninguno de los dos niveles, porque si A es más fuerte que B, eso no implica que B sea más fuerte que A. Pero hay algo muy obvio que podemos inferir, al nivel de lo infinito, cuando A es más fuerte que B y B más fuerte que A. Se ve claro que en este caso A y B van a tener la misma fuerza, lo que equivale a decir que serán coordinables. La demostración de este teorema es una de las cosas más bellas y elegantes que hay en la matemática y la lógica. Aunque lo vamos a necesitar dos veces solamente en los capítulos siguientes, puesto que estamos pasando muy por encima de la teoría del infinito, es imposible resistir la tentación de exhibir su demostración. El teorema lleva el nombre de Shröder y Bernstein y se enuncia así: Si dos conjuntos se dominan uno al otro, entonces son coordinables. La demostración procede así:

Supóngase que tenemos dos conjuntos, A y B, que se dominan uno al otro. Queremos demostrar que, bajo esta hipótesis, los dos conjuntos son coordinables. Por supuesto, A y B son infinitos, puesto que de otra forma no podrían dominarse recíprocamente.

Si A domina a B, B es coordinable con una parte de A. Si B domina a A, A es coordinable con una parte de B. El siguiente diagrama, en donde se le llama A' a la parte de A coordinable con B, y B' a la parte de B coordinable con A, ilustra gráficamente esta doble coordinabilidad:

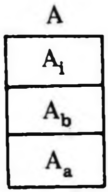


Fijémonos primero en la coordinabilidad de A con la parte B' de B. Todo elemento de A está asociado con un elemento único de B'. A este elemento de B' lo vamos a considerar "hijo" del elemento de A con el cual se le asocia, y que es su "padre". Esto significa que todos los elementos de A son padres de un hijo único en B'. Ahora repárese en que hay elementos en B que no son hijos de ningún elemento de A. Son los "huérfanos" en B que ocupan el rectángulo debajo del de B'.

Lo correspondiente pasa si nos fijamos ahora en la coordinabilidad de B con A' y le llamamos padre de un elemento de A' al elemento B con el cual se asocia y corresponde. Por supuesto, también en A hay huérfanos. En general, todos los elementos, tanto los de A como los de B, son padres de un hijo único, pero no todos los elementos de A ni los de B son hijos de algún padre.

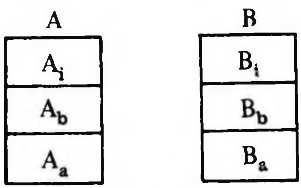
Además, dado un elemento de A o de B, decimos que su hijo, y el hijo de su hijo, y el hijo del hijo de su hijo, etc.. . . .son sus "descendientes". Un elemento de A, en consecuencia, tendrá descendientes tanto en A como en B. Y lo mismo un elemento de B.

Ahora dividimos A en tres compartimentos: A_a, A_b. A_i, como aparece en el siguiente diagrama:



Incluímos en A_a todos los elementos de A que son huérfanos en A o descendientes en A de algún huérfano en A. En A_b ponemos todos los elementos de A que son descendientes de algún huérfano en B, y en A_i ponemos los elementos de A que no tienen un primer padre original, es decir, aquellos elementos de A cuyos ascendientes son infinitos. La existencia de estos elementos con genealogía infinita es perfectamente posible por el carácter infinito de A.

Hacemos lo correspondiente como B, pero ubicando los compartimientos, para mayor facilidad gráfica, con el orden que se indica en el siguiente diagrama:



Ahora demostramos que A_a y B_a son coordinables. En efecto, para cada elemento de A_a, huérfano de A o descendiente en A de un huérfano en A, existe un hijo único en B, (como en general para todo elemento de A). Pero los hijos de los elementos de A_a van a estar todos en B_a, puesto que éste es el compartimento de los descendientes en B de los elementos en A_a. Luego, para cada elemento en A_a existe un elemento único en B_a. Y recíprocamente, por definición misma de B_a, para cada elemento suyo existe un padre único en A_a. Luego A_a y B_a son coordinables.

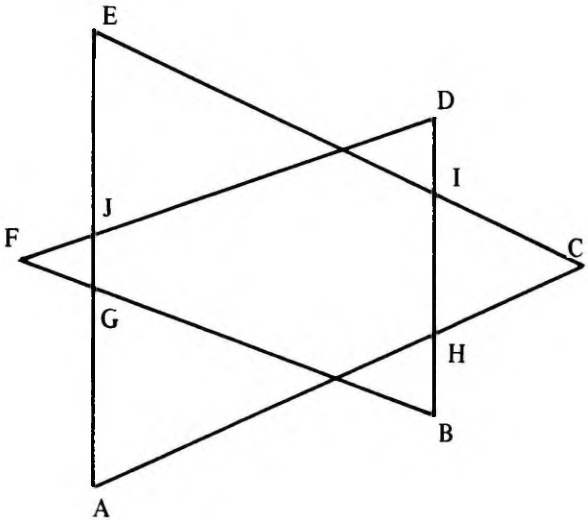
Por exactamente las mismas razones, B_b es coordinable con A_b. Es el mismo raciocinio que el anterior, sólo que partiendo de la acera de enfrente.

Por último, demostramos que A_i y B_i son coordinables. Si un elemento de A es miembro de A_i, eso indica que sus antecesores son infinitos. Luego sus descendientes, y en particular los que están en B, tienen también infinitos antecesores. Esto implica que para cada elemento de A_i, existe un hijo único suyo en B_i. Y recíprocamente, si un elemento de B es miembro de B_i, eso quiere decir que sus antecesores son infinitos, luego por fuerza debe tener un padre cuyos antecesores sean también infinitos. Este padre, claro está, pertenece a A_i. A_i y B_i son por tanto coordinables.

Sumando estos tres resultados, tenemos que A y B son coordinables. Y eso es lo que había que demostrar.

Es una pena no estar en condiciones de mostrar cuán poderoso es el teorema de Shröder y Bernstein. Tiene, fuera de su extraordinaria belleza, una gran aplicación en esos casos, tan frecuentes, en que queremos demostrar la coordinabilidad de dos conjuntos sin hallar la forma de parear sus elementos para establecer la correspondencia de uno a uno que necesitamos. Basta encontrar, entonces, la prueba de que se dominan mutuamente para que el teorema de Shröder y Bernstein garantice la coordinabilidad buscada.

Por ejemplo, considérese la siguiente figura:



Vemos que el segmento EA es más fuerte que el segmento DB, porque DB es coordinable con una parte, JG, de EA. Pero igualmente el segmento DB es más fuerte que EA, porque EA es coordinable con una parte, IH, de DB. En consecuencia, en virtud de Shröder y Bernstein, EA y DB son coordinables. (La razón por la que EA es coordinable con IH, y DB con JG, es la misma que aparece en el segundo ejemplo al principio del capítulo III).

Repárese en que, en el caso infinito, la recíproca del teorema de Shröder y Bernstein es también verdadera: Si dos conjuntos son infinitos y coordinables, entonces se dominan mutuamente. En efecto, si A y B son dos conjuntos infinitos y coordinables, B es coordinable con una parte suya B', porque es infinito. Luego, por la transitividad de la coordinabilidad, A es coordinable con B'. Luego B domina a A. Por otra parte, como A es infinito, es coordinable con una parte suya A'. Luego B es coordinable con A'. Luego A domina a B. Es decir, que es perfectamente posible que un conjunto domine a otro y sin embargo ser tan fuerte como él, esto es, coordinable con él. En definitiva, que un conjunto puede dominar o ser más fuerte que otro tan fuerte como él mismo. Es el caso que tenemos cuando dos conjuntos son infinitos y coordinables: se dominan mutuamente, según acabamos de demostrar.

Como conviene mucho poder eliminar este caso, definimos la dominación o fuerza **estricta**. Diremos que un conjunto es estrictamente más fuerte que otro, o que lo domina estrictamente, cuando el segundo es coordinable con una parte del primero, y no son coordinables. O, más llanamente, cuando el primero es más fuerte o domina al segundo, pero no son coordinables. O, también, cuando el primero domina al segundo, pero el segundo no domina al primero.

En el capítulo anterior, por ejemplo, teníamos que P(N) no sólo domina a N, sino que lo domina estrictamente. Por supuesto, ningún conjunto, ni siquiera uno infinito, se domina estrictamente a sí mismo, aunque se domine a sí mismo.

Ya veremos cómo podremos subir, de infinito en infinito, en donde cada uno es estrictamente más fuerte que el anterior, por los infinitos pisos del infinito.

VIII

NUMEROS INFINITOS

Desde un principio hemos hablado de "cantidades infinitas", entendiendo tácitamente que una cantidad es infinita cuando corresponde al número de elementos de un conjunto infinito. No hay circularidad en esto, porque recuérdese que se ha definido lo infinito sin echar mano al concepto de número. En este capítulo vamos a formalizar un poco esta idea de número. Nuestro propósito principal es, claro está, el de poder hablar de números infinitos.

El problema consiste en dar una definición de número que, sin contradecir la noción que ya tenemos de número natural con la que manipulamos los conjuntos finitos, pueda también hacerse cargo de los conjuntos infinitos. A esta clase de número se le llama **número cardinal** y viene a ser una extensión al infinito de los números naturales, todos los cuales son finitos.

Hay varias formas de definir número cardinal. La que empleó el propio Cantor es sin duda la más fácil y la que más se asemeja al proceso psicológico en el que el niño genera la noción de número, pero seguramente no es la más rica desde el punto de vista de la lógica. Ya hemos indicado cómo la lógica y la psicología están ordenadas generalmente en sentido opuesto.

En todo caso, la definición de Cantor es ésta: Número cardinal es lo que queda cuando, dado un conjunto cualquiera, prescindimos de la naturaleza de los objetos que lo constituyen como también del orden en que nos son dados. Por ejemplo, el número cardinal de mi mano, considerada como un conjunto de dedos, es cinco, pues ésa es la idea que queda en mí cuando, al cabo de un doble proceso de abstracción, prescindo de la naturaleza y del orden de sus dedos. De igual suerte, el número cardinal de una docena de naranjas es 12.

Repárese en que dos conjuntos pueden ser totalmente diferentes y tener el mismo número cardinal. Basta que sean coordinables. Por ejemplo, una docena de puñales, una docena de átomos y una docena de galaxias, tienen el mismo cardinal, 12, que la docena de naranjas. Porque no se considera la naturaleza de los elementos del conjunto. Y repárese también que los naturales coinciden con los cardinales finitos: el producto de la doble abstracción sobre un conjunto finito. Por esta razón, los cardinales finitos se los escribe y llama con el mismo nombre de los naturales: 1, 2, 3, 4, ...

Cada número cardinal finito puede ser definido en particular en términos de un natural. El cardinal 12, por ejemplo, como el resultado de la doble abstracción de un conjunto con 12 (número natural) elementos. Pero también, y esto es mucho más elegante, podemos definir los cardinales finitos sin necesidad de conocer ni echar mano a los naturales. Primero definimos el cardinal 1 así: El resultado de la doble abstracción sobre un conjunto tal que contiene **algún** elemento, y tal que si contiene **cualquier** otro, ambos son **iguales.** Esta definición sólo requiere de los conceptos lógicos: **algún, cualquier, igual.** Después de todo, de alguna parte hay que partir. Lo interesante es que no se está partiendo de la noción de número natural.

Definido el 1, el 2 es más fácil: Es el cardinal obtenido de dos conjuntos diferentes ambos con cardinal 1. Caso de que nos moleste el "dos" de "dos conjuntos", podemos definirlo así: 2 es el cardinal de un conjunto que contiene **algún** elemento x, **algún** elemento y, **diferentes** entre sí, y tal que si contiene cualquier otro elemento z, $x \neq z$ o $y \neq z$. Aquí también sólo se ha echado mano a los conceptos lógicos anteriores, más el de **diferente**, que se lo define como no-igual.

El 3 ahora es el cardinal de la unión de dos conjuntos diferentes totalmente, uno de los cuales tiene cardinal 1 y el otro cardinal 2, ambos de los cuales han sido ya definidos. Siguiendo este mismo hilo se obtienen el 4, 5, 6, ...

Para definir el cardinal 0, que por lo general no se lo considera natural, hay que partir del conjunto vacío. Hemos dicho **el** conjunto vacío y no un conjunto vacío porque solamente existe uno. Efectivamente, razonando también aquí por absurdo, si existieran dos conjuntos vacíos diferentes, algo tendría que tener el uno que no lo tenga el otro, puesto que son diferentes. Pero esto es absurdo, porque un conjunto vacío no tiene nada. Luego hay solamente uno. El cero, entonces, es el cardinal del conjunto vacío.

Es cierto que esta noción de conjunto vacío molesta un poco, y sin embargo nadie se extraña cuando al ir a sacar un cigarrillo de la cajetilla resulta que se acabaron. Incluso un niño entiende cuando se le dice que ya no hay pastillas, que el frasco está vacío. La idea de la nada es otra tan interesante como la del infinito. Justamente, las dos se dan cita en el momento más solemne de todos, el de la muerte.

Por otra parte, en el extremo opuesto, dado un conjunto infinito, el cardinal que se abstrae de él se llama **cardinal infinito.** Por ejemplo, supóngase que nos es dado el conjunto infinito N. Hacemos abstracción de la naturaleza de los números naturales y del orden en que nos son dados, y el resultado es un número cardinal infinito. A este número Cantor le llamó **aleph–cero**. si nos molesta el recurrir a los naturales para concebirlo, podemos obtenerlo de cualquier otro conjunto que sea infinito enumerable, porque todo conjunto infinito enumerable tiene como cardinal aleph-cero. Esto, por definición de aleph-cero.

Pero hay otros números cardinales infinitos. Por ejemplo el de P(N). Al cardinal o **potencia**, (es otro nombre para cardinal), de este conjunto de conjuntos, le vamos a llamar, con un poco de atrevimiento, aleph-uno. Después veremos por qué es un atrevimiento llamarlo así.

Antes de seguir más adelante tratando a los cardinales, veamos otra definición, más corriente que la de Cantor, de número cardinal. Es la que se debe a

Frege y que, aunque parece muy artificial, goza de la aceptación de la mayoría de los lógicos y matemáticos. Dice así: El número cardinal o potencia de un conjunto es la colección de todos los conjuntos coordinables con el conjunto dado. Por ejemplo: Reunamos mentalmente todos los conjuntos coordinables con mi mano. Conjuntos coordinables con mi mano hay infinitos. Pues bien, esa super-colección de colecciones es lo que se llama 5. Ya advertimos que la definición del modestísimo número 5 es capaz de asustar al más valiente. Para los efectos del nivel en el que estamos desplegando la teoría del infinito, es indiferente la definición que decidamos adoptar. Ambas son equivalentes e igualmente válidas. E igualmente peligrosas, según veremos al final.

Ahora queremos ordenar estos cardinales que ya tenemos. Porque el orden no es solamente condición necesaria para poder movernos entre las cosas, también lo es para la belleza, la elegancia de lo que se piensa. Lo desordenado, lo caótico, por encima de todo, es feo.

Con respecto a los cardinales finitos, no hay ningún problema en ordenarlos, y en ordenarlos bien. Sencillamente les imponemos el orden que tienen sus homónimos naturales, poniendo al 0 en primer lugar. Pero esta relación de orden que ordena a los naturales, y a los cardinales finitos, no funciona con números infinitos. Por ejemplo, yo sé que el 3 viene antes del 7, (podemos concebir al 3 y al 7 como cardinales o como naturales, da lo mismo), porque puedo **restarle** 3 al 7. Pero, ¿qué viene antes, aleph-cero o aleph-uno? Claro está, queremos pensar que aleph-cero viene antes. ¿Cómo justificamos racionalmente esta preferencia? No puede ser con el mismo criterio que usamos para los números finitos porque, según advertimos en el momento oportuno, la operación de la resta no funciona en el nivel infinito. Unas veces sale un resultado y otras veces sale otro, y así no hay manera de definir una operación.

No queda más remedio que introducir otra relación de orden para cardinales que pueda funcionar en los dos niveles. Se trata de una relación muy análoga a la ya comentada de la fuerza o dominación para conjuntos. Tan análoga, que se va a llamar y se va a leer de la misma manera: Diremos que un cardinal es más fuerte que otro, si el conjunto característico que tiene como cardinal al primero es más fuerte que el conjunto característico que tiene al segundo como cardinal. No habrá confusión. Siempre sabremos, por el contexto, si la fuerza que usamos es la relación entre conjuntos o entre cardinales.

Por la forma en que se ha definido la fuerza de un cardinal, deducimos inmediatamente dos cosas. Primero, que la fuerza de un cardinal finito coincide plenamente con su tamaño. Es decir, dados dos cardinales finitos, el uno es más fuerte que el otro si y sólo si es más grande.

Segundo, que todos los teoremas del capítulo anterior sobre la fuerza de conjuntos son igualmente válidos para la fuerza de cardinales. Esto es: El cardinal de un conjunto es siempre más fuerte que el de cualquiera de sus partes. Todo cardinal infinito es más fuerte que todo cardinal finito. Todo cardinal infinito es más fuerte que sí mismo. Si un cardinal es más fuerte que otro, y éste más que un tercero, el primero es más fuerte que el último. Si un cardinal es más fuerte que otro, y éste más fuerte que el primero, los dos cardinales son iguales, (Shröder y Bernstein). Si dos cardinales son iguales e infinitos, entonces cada uno es más fuerte que el otro.

Por último, también aquí definimos una relación de fuerza estricta: Un cardinal es estrictamente más fuerte que otro, si es más fuerte pero diferente. En consecuencia, ningún cardinal, ni aun uno infinito, es estrictamente más fuerte que sí mismo.

Ahora ya podemos decir quién viene antes, aleph-cero o aleph-uno. Aleph-cero, como queríamos. Pero ahora podemos decir por qué: Porque P(N) es más fuerte que N. Y como es estrictamente más fuerte, según se demostró, aleph-uno es estrictamente más fuerte que aleph-cero.

Los cardinales, ahora, aparecen ordenados así, conforme aumenta estrictamente su fuerza:

0,1, 2, 3, 4, 5, ... ,aleph-cero, aleph-uno . . .

Con esto, hemos dado el primer paso hacia una aritmética de números infinitos, una aritmética de Dios.

IX

LO INNOMBRABLE

El encuentro que hemos tenido en un capítulo anterior con un conjunto innumerable, da pie a una meditación de graves consecuencias filosóficas. Y es ésta: todo nombre es una sucesión finita de letras. Las letras son sólo 28 en nuestro alfabeto, pero bastan para que con ellas podamos hacer una cantidad infinita de nombres, de igual manera que se puede, por ejemplo, expresar una cantidad infinita de naturales con sólo diez dígitos. Hay, pues, bastantes nombres. Pero no los suficientes, porque vamos a demostrar que existen más cosas que nombres posibles. Y no sólo unas cuantas más, sino que infinitamente más.

La demostración es bien sencilla: Por muy infinito que sea el conjunto de los nombres posibles, los podemos ordenar lexicográficamente, como lo están en los diccionarios, y esto significa que los podemos enumerar. El orden lexicográfico, después de todo, es igual que el de la fila india. El número de nombres posibles, pues, es aleph-cero: hay una cantidad infinita de ellos, pero de un infinito enumerable. En consecuencia, los conjuntos innumerables, de los que veremos hay una cantidad infinita, están llenos de cosas para las cuales no hay nombre posible.

La situación no se alivia en lo más mínimo si admitimos considerar como nombre cualquier expresión linguística contando como letra el espacio en blanco. Aunque contáramos con un alfabeto infinito, siempre podríamos ordenar en fila india las palabras por orden alfabético, y enseguida enumerarlas: la parte más fuerte de los conjuntos innumerables será la constituída por elementos inonimados e innombrables. ¡Y nosotros que pensamos que la mayor parte de las cosas tienen varios nombres¡ El hecho es que la mayoría no tiene, ni puede tener, ni uno solo siquiera.

Y no es solamente al silencio al que estamos destinados. Resulta que no puede haber concepto sin palabra; luego, lo que se ha dicho de la limitación del lenguaje debe también extenderse al alcance del pensamiento: La mayoría de las cosas son inconcebibles. No podemos llamarlas ni con el pensamiento. Es un silencio total.

Lo innombrable, lo inconcebible, no lo es como la **cosa en sí** de Kant, algo más allá de nuestras posibilidades, del otro lado de mí, que en el momento de entrar dentro del radio de acción de mi conocimiento se disfraza de fenómeno. Ni tampoco como el Dios de los místicos, incognocible por virtud propia, por misterio. No. Lo innombrable, lo inconcebible, no tiene nada de irracional, no tiene nada de especial, ninguna naturaleza misteriosa y profunda. Sencillamente el mundo es demasiado rico, o, para decirlo con precisión, demasiado fuerte para los hombres. Los hombres tenemos acceso sólo al nivel de lo enumerable, nuestro tope es el pìso de aleph–cero. No damos para más, aunque se nos estire infinitamente.

Antes de lamentarnos, recordemos que es un piso infinito y que por lo mismo no lo agotaremos nunca. El pensamiento, la ciencia, la cultura en general, tiene todo el campo que quiera donde correr, pero no es más, ni puede ser más, que una mera aproximación a la extraordinariamente rica realidad en la que somos, pensamos y sentimos. Sólo la teoría del materialismo marxista fundamenta esta concepción de lo **incognocible racional** en virtud de la riqueza del mundo.

Además, y esto también hay que decirlo para no sumirnos en ningún tipo de pesimismo, la inducción infinita, cuya legitimidad se ha demostrado en un capítulo previo, nos provee de un arma increíble; un instrumento de conocimiento con el que estamos capacitados para conocer propiedades de estos elementos incognocibles. No hay contradicción en esto. Yo puedo saber que todos los elementos de un conjunto dado tienen determinada propiedad sin conocer todos los objetos del conjunto.

Kurt Gödel, un lógico matemático contemporáneo, ha demostrado algo que está en estrecha relación con todo esto. Demostró que a toda teoría le es esencialmente inherente ciertas limitaciones. Por mucho que avance el hombre hacia la posesión intelectual del mundo, siempre le quedará camino por recorrer.

La tarea de pensar, pues, y de descubrir, no terminan nunca, ni en consecuencia el oficio de ser hombre, la penosa y alegre tarea de vivir. Es una faena infinita que debería estar encomendada a los dioses si no fuera porque –y esto se puede demostrar– los mismos dioses no podrían hacerla mejor que nosotros.

X

EL GRAN SALTO

Hemos definido una relación para conjuntos: la dominación o fuerza, y una para números cardinales. Se ha demostrado que todo conjunto infinito domina estrictamente a todo conjunto finito, o, lo que viene a ser lo mismo, que todo número (cardinal) infinito es estrictamente más fuerte que uno finito. Además, se demostró que aleph–uno es estrictamente más fuerte que aleph–cero. Nos preguntamos ahora si existe algún número más fuerte que aleph–uno, y si existe algo tan poderoso que ni aleph–uno, cuyo piso ya nos es inaccesible en el sentido que comentamos en el capítulo anterior, es capaz de medir su fuerza o riqueza.

Ambas respuestas son afirmativas. Y la primera de un modo mucho más general de lo que preguntamos: Dado un número cardinal cualquiera, finito o infinito, podemos encontrar otro estrictamente más fuerte.

Para el caso finito, esta afirmación parece trivial, porque no tengo más que sumarle 1 a cualquier número finito para obtener como resultado un número más grande y en consecuencia estrictamente más fuerte. Pero para el caso infinito no tiene nada de trivial. Por mucho que sume 1, o un millón, o $10^{10^{100}}$ a un número infinito, el resultado sigue siendo ese mismo número infinito. La razón de esto es que todo conjunto infinito contiene una parte infinita enumerable, y se demostró que un conjunto infinito enumerable se traga cualquier conjunto finito sin crecer en absoluto. No sólo, pues, los números finitos son infinitos, también lo son los infinitos.

El teorema que demuestra la infinitud de los números, finitos e infinitos, se llama **teorema de Cantor**. Y realmente se merece el nombre, porque tiene una demostración extraordinariamente curiosa y bella. Además, el teorema no se conforma con demostrar la existencia de un número estrictamente más fuerte que uno dado cualquiera, sino que, encima, nos construye un conjunto característico que luce a ese cardinal más fuerte.

El teorema se enuncia así: Dado un conjunto A cualquiera, el conjunto de sus partes, P(A), lo domina estrictamente. Y esto, por supuesto, es equivalente a decir que dado un número cualquiera, cardinal de un conjunto A, el número cardinal de P(A) es estrictamente más fuerte que el dado. Las dos únicas restricciones del teorema son los casos en que A tiene un elemento y dos elementos, porque en esos casos P(A) tiene ningún elemento y dos elementos respectivamente.

Antes de proceder con la demostración, tómese nota de que este teorema no es el mismo que ya probamos, en donde se dice que P(N) es estrictamente más fuerte que N, y en consecuencia que aleph–uno es estrictamente más fuerte que aleph–cero. El teorema de Cantor no se restringe a los coniuntos infinitos enumerables. Es mucho más general, se refiere a todo conjunto, enumerable o innumerable, con las dos excepciones citadas. Ese teorema anterior, en todo caso, puede tomarse como un caso particular o aplicación del de Cantor.

La demostración procede así: Primero notamos que, dado un conjunto A cualquiera, P(A) lo domina. (Repárese en que no hemos dicho que estrictamente). La razón por la que P(A) domina a A es que A es coordinable con una parte de P(A), a saber, la parte de P(A) cuyos elementos son las partes unitarias de A. Obviamente A tiene tantas partes unitarias como elementos. Sólo hay que demostrar que A no es coordinable con P(A) para poder afirmar que P(A) domina estrictamente a A. Y la demostración de esto, que es tan obvio, es bastante sutil. Hay que ir despacio y con cuidado. También aquí se cumple que la prueba de lo obvio es notablemente difícil, en tanto que la de las cosas "raras" es muy sencilla.

Razonando, claro está que por absurdo, supongamos que A y P(A) son coordinables. Vamos a llegar a una contradicción, y en ese mismo instante quedará terminada la prueba.

Si A y P(A) son coordinables, eso significa que a cada elemento de A le corresponde un elemento único de P(A), y recíprocamente. Esto se puede decir así: a cada elemento de A le corresponde una parte única de A, y recíprocamente. Ahora bien, dado un elemento de A cualquiera, ese elemento puede o no pertenecer a la parte de A que le corresponde. Llamémosle B a la parte de A constituída por todos aquellos elementos de A que **no** pertenecen a la parte que les corresponde. Como B es parte de A, B es elemento de P(A), y en consecuencia le corresponde un elemento, que vamos a llamar b, de A. Ahora nos preguntamos si b pertenece o no a B, y llegamos al absurdo de que pertenece a B y no pertenece a B a la vez.

Efectivamente, si b pertenece a B, como B contiene sólo a los elementos que no pertenecen a las partes con que se corresponden, y como B es la parte que se corresponde con b, b no pertenece a B. Por otra parte, si b no pertenece a B, que es la parte con que está asociada, b es de los elementos que no pertenecen a la parte con que están asociados, luego pertenece a B, que es la colección de todos los elementos de A que no pertenecen a la parte con que están asociados.

En resumen, uniendo los dos resultados obtenidos: si b pertenece a B, entonces b no pertenece a B, y si b no pertenece a B, entonces b pertenece a B. Y esto es absurdo, porque equivale, por un cómputo lógico muy sencillo que podemos intuir, a decir que b pertenece y no pertenece a B.

Con eso queda terminada la prueba, tan extraordinaria en su forma como en su contenido, de que, dado un objeto A cualquiera, considerado como conjunto, P(A) lo domina estrictamente. O, también, de que dado un número cardinal cualquiera, el cardinal del conjunto que contiene como elementos todas las partes posibles de un conjunto con el cardinal dado, es estrictamente más fuerte que él.

Ahora bien, en el análisis combinatorio se nos da una fórmula para computar el número de partes posibles de un conjunto. Es ésta: $2^n - 2$, donde n es el número de elementos del conjunto cuyas partes queremos contar. Por ejemplo, un conjunto con 4 elementos tiene $2^4 - 2 = 14$ partes distintas. Si esos cuatro elemtos son a, b, c, d, las catorce partes posibles son:

a, b, c.	b, c.
a, b, d.	b, d.
a, c, d.	c, d.
c, b, d.	a.
a, b.	b.
a, c.	c.
a, d.	d.

Las cuatro últimas partes son las unitarias.

Repárese en que la fórmula requiere que el número de elementos del conjunto que queremos analizar en sus diferentes partes tenga más de un elemento. Un conjunto con un solo elemento no tiene partes posibles. (Unicamente tendría como parte a la vacía, pero ya hemos dicho que no queremos meternos con la nada).

Con esta fórmula y el teorema de Cantor a la mano, podemos formar siempre, incluso en el nivel infinito, un número más fuerte que otro dado. Lo único que hemos de hacer es tomar el dos, o cualquier otro número finito mayor que 1, elevarlo a la potencia del número dado y restarle 2. El resultado, es lo que demuestra el teorema de Cantor, es estrictamente más fuerte que el número dado.

En consecuencia, si convenimos en denotar A_0 alph–cero, A_1 a alph–uno, tenemos que 2^{A_0} es estrictamente más fuerte que A_0, 2^{A_1} estrictamente más fuerte que A_1. Ahora bien, se recordará que se le llamó A_1 al cardinal de P(N), y estamos viendo que el cardinal de P(N), en virtud de la fórmula de arriba, es 2^{A_0}, porque A_0 es el cardinal de N. (En rigor, habría que decir que el cardinal de P(N) es $2^{A_0} - 2$, pero como es un número infinito decimos simplemente 2^{A_0}, puesto que el 2 extra que le estamos regalando no le añade nada y nos simplifica sin embargo la fórmula). Lueo $A_1 = 2^{A_0}$. Y siguiendo este mismo hilo de razonamiento, tenemos que $A_2 = 2^{A_1}$ $A_3 = 2^{A_2}$, . . .De esta forma tenemos una cadena infinita de alephs:

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

En donde cada uno es estrictamente más fuerte que el anterior.

Ahora se ve por qué decíamos que ni los dioses mismos podrían superarnos en nombrar, y en consecuencia concebir y agotar intelectualmente al universo entero. Aun cuando contaran ellos con un alfabeto infinito, que parece no puede ser más que infinito enumerable, y con palabras tan largas que para decirlas se necesitara de una eternidad (enumerable), podrían sólo nombrar los elementos de los conjuntos con la fuerza de P(N), es decir A_1. Porque cada nombre viene a ser una parte de ese alfabeto infinito enumerable, donde hay nombres eternos. Los demás infinitos seguirían llenos de objetos innombrables. Tales dioses hipotéticos nos ganarían sólo por un piso. Como los pisos son infinitos, la diferencia es perfectamente despreciable.

Y ahora, para terminar, un problema. Y es un problema muy famoso que acaba de ser resuelto en estos últimos años. Si n es un número cardinal finito mayor que 2, $2^n - 2$, es estrictamente más fuerte que n, pero no es el siguiente a n en fuerza. Entre n y $2^n - 2$ pueden haber muchos números finitos intermedios. Por ejemplo, entre 4 y $2^4-2=14$ hay nueve números intermedios. Para buscar el **siguiente** a un número finito, el sucesor inmediato, hemos de sumarle 1.

Eso con respecto a un n finito. ¿Pero cuál es la situación si el exponente es un número infinito? Está claro que A_1 es estrictamente más fuerte que A_0, y A_2 más fuerte estrictamente que A_1.., etc. . . . Pero, ¿cómo sabremos si A_1 es el infinito siguiente a A_0 ? ¿Es que no puede haber, acaso, entre A_0 y A_1 algún cardinal infinito intermedio, más fuerte que A_0 pero menos que A_1 ?

La pregunta puede generalizarse para A_n y A_{n+1} . Cuando Hilbert hizo una lista de los problemas más urgentes que había que resolver, puso éste encabezando la lista. El mismo Cantor hizo la conjetura, la hipótesis, de que no había infinitos intermedios entre los alephs. Se le llamó a esta conjetura la **hipótesis del continuo**, porque establecía que el infinito inmediatamente siguiente a aleph-cero era aleph-uno, y a aleph-uno se le llama también, por una razón que vendrá después, la fuerza del continuo.

La solución final que tuvo este problema es bastante desconcertante. Resultó que Cantor no se había equivocado en su conjetura, pero tampoco acertó, porque recientemente se ha demostrado, por Gödel y Cohen, que puede pensarse cualquiera de las dos cosas: que hay y que no hay infinitos intermedios entre los alephs.

La biografía de la hipótesis del continuo es parecida a la tan accidentada de una hipótesis famosa de Euclides, la del quinto postulado. Al final, en el siglo XIX, resultó que daba lo mismo considerarla verdadera que falsa. Sólo que era más conveniente considerarla falsa cuando se trataba de construir una geometría para el macrocosmos. Así nacieron las geometrías no-euclideanas.

En estos momentos está naciendo la matemática no-cantoriana, demostrada la independencia de la conjetura de Cantor. Nadie sabe qué va a pasar. Pero si las geometrías no-euclideanas fueron un trago fuerte para muchas personas, hay que sospechar, y en consecuencia prepararse para ello, que las teorías no-cantorianas nos van a sacudir y conmover profundamente.

XI

LO INNUMERABLE

El ejemplo de conjunto innumerable que hemos dado, P(N), tiene algo de artificial, en el sentido de que hay que formarlo: reunir en una sola colección todas las partes posibles de N. Por supuesto, cualquier P(A), donde A es infinito enumerable, tiene el mismo número, aleph-uno, de elementos, pero adolece de igual defecto. Hay un ejemplo muy bueno, en cambio, de conjunto innumerable, que además va a dar mucho que decir. Es el conjunto de los números reales, que de ahora en adelante denotaremos con una R.

A pesar de ser muy corrientes, los números reales son un poco difíciles de explicar. Quizá la explicación más sencilla sea ésta: Recordamos la definición de número racional como todo número representable en la forma de una fracción p/q donde p y q son enteros y q no es cero. En consecuencia, son números irracionales, si es que los hay, los que no se pueden escribir así. No conocemos en este instante ningún número irracional. (Sabemos que $\sqrt{2}$, por ejemplo, es irracional, pero nos hacemos los tontos). Vamos a demostrar más adelante que números tales, irracionales, existen, y en número infinito, sin necesidad de conocer uno. Es decir, será una prueba de existencia, como el teorema de Zermelo. En matemática, como en teología, existen muchas pruebas de esta clase en donde se demuestra que existen cosas de las que, sin embargo, no conocemos ninguna.

Pues bien, con esto tenemos ya a los reales: sólo hay que unir los racionales con los irracionales.

Se puede demostrar que todo número racional se lo puede expresar con la forma:

$$a.\, d_1 d_3 d_3 d_4 d_6 \ldots$$

Donde a es un entero y d, de las que hay un número infinito, un decimal. Estos decimales pueden ser todos ceros, como por ejemplo $7/1 = 7.000000\ldots$ O ser ceros a partir de un decimal dado, como por ejemplo 3/2 = 1.500000. . . . U otro número cualquiera. Por ejemplo 1/3 = 0.3333333. . .. O también puede darse el caso que lo que se repite sea un bloque de números, como por ejemplo 6/7 = 0.857142 857142. . .

En otras palabras, que todo número racional, expresado en su forma decimal, puede ser previsto totalmente a partir de algún decimal. Como esta propiedad es característica de ellos, los irracionales no la tienen. Con los irracionales, si es que existen, no podemos nunca predecir cuáles serán los decimales siguientes aunque se nos dé una sucesión muy larga de los ya aparecidos. (El número 3.1416. . . . es un famoso irracional que no podemos citar porque estamos fingiendo que no conocemos ninguno). Justamente por esta razón se les llama **irracionales**. No es que sean números locos. Son tan lógicos, tan racionales, como cualquier otro. Lo que acontece es que para los griegos la palabra **logos** significaba lenguaje, nombre, verbo, y estamos viendo que estos números son ilógicos, en el sentido de que nunca podemos acabarlos de nombrar, de decir o escribir su nombre. Con los racionales, aunque tienen una cantidad infinita de decimales, podemos decir: tal entero, tal primer decimal, tal segundo, etc. . . . . y de allí en adelante tal. Por ejemplo, el 3/2: uno punto cinco, y de allí en adelante cero. Y esto es lo que no podemos hacer con los irracionales.

En suma, podemos decir que es real todo número que puede ser expresado con una expansión infinita (enumerable) de decimales, (que se repiten o no).

Ahora vamos a demostrar que el conjunto de reales entre el cero y el uno, incluyendo al cero pero excluyendo al uno, es infinito innumerable. A este conjunto vamos a llamarle S para economizar palabras.

En primer lugar, S es infinito, porque contiene una parte infinita enumerable: el conjunto de racionales

$$1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ 1/5,\ 1/6,\ 1/7, \ldots, 1/n, \ldots$$

Ahora sólo hay que probar que no es enumerable.

Razonando por absurdo, suponemos que es enumerable y que tenemos enumerados los reales entre 0 y 1. Aunque no sepamos el orden en el que quedaron, los tendremos en fila india, así:

$$
\begin{array}{ll}
1 & 0.\ d_{11}\ d_{12}\ d_{13}\ d_{14}\ d_{15}\ \ldots \\
2 & 0.\ d_{21}\ d_{22}\ d_{23}\ d_{24}\ d_{25}\ \ldots \\
3 & 0.\ d_{31}\ d_{32}\ d_{33}\ d_{34}\ d_{35}\ \ldots \\
4 & 0.\ d_{41}\ d_{42}\ d_{43}\ d_{44}\ d_{45}\ \ldots \\
5 & 0.\ d_{51}\ d_{52}\ d_{53}\ d_{54}\ d_{55}\ \ldots \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

En donde cada d es un decimal. Para llegar al absurdo sólo debemos encontrar un real entre el 0 y el 1 que no esté en la lista de arriba, porque estamos suponiendo que la lista está completa. Y ese real, r, que viene a destruir la hipótesis se lo construye de la siguiente forma: Como primer decimal ponemos un número cualquiera diferente del primer decimal del primer real en la lista. Como segundo decimal, un número cualquiera que sea diferente del segundo decimal del segundo real. Como tercer decimal, uno que sea diferente del tercero del tercer real, y del mismo modo en adelante, siguiendo la diagonal. En general, el enésimo decimal del real que construímos será diferente del enésimo decimal del enésimo real. El número real, r, que construímos tendrá la forma: $r = 0.\ e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ e_5 \ldots$

Donde e_1 es diferente de d_{11}, e_2 diferente de d_{22}, etc...., y en general e_n diferente de d_{nn}.

Esto significa que r es diferente del primer real, porque difiere de él, por lo menos, en su primer decimal. Es diferente del segundo, porque difiere, por lo menos, en su segundo decimal. Y en general, es diferente del enésimo real de la lista, para cualquier n, porque difiere, por lo menos, en el enésimo decimal. Es decir, r es diferente de todos los que están en la lista, y sin embargo r está entre el 0 y el . Luego la lista no está completa, puesto que le falta r, contradiciéndose así la hipótesis de que la lista está completa. Luego la hipótesis es falsa. Luego no es verdad que el conjunto de reales entre 0 y 1, S, sea enumerable. Como ya se vió que era infinito, es innumerable.

Un pequeño detalle que hay que decir, por si hay algún lector meticuloso, es que admitimos sólo una única representación decimal para cada real, descartando por esta razón toda sucesión infinita de nueves. Donde haya uno, sustituímos los nueves por ceros, aumentando en una unidad el decimal anterior a la sucesión. Es decir, que no consideramos, por ejemplo, 0.499999....., sino sólo 0.500000... Ambos denotan el mismo número. Esto es con el propósito de que cada real tenga una sola y única representación decimal.

Ahora vamos a demostrar que esta parte de los reales, S, los mayores o iguales que 0 y menores que 1, es coordinable con P(N). Es decir, que su cardinal es aleph-uno. La demostración, como se verá, echa mano al teorema de Shröder y Bernstein.

Cada elemento de P(N) es una parte de N, es decir un conjunto, finito o infinito, de números naturales. Pues bien, asociamos con cada parte de N un número real de S:

$$0.\, d_1\, d_2\, d_3\, d_4\, d_5 \ldots$$

En donde d_1 es 3 si y sólo si 1, el subíndice de d_1, pertenece a la parte. Si 1 no es elemento de la parte de N que consideramos, hacemos que d_1 sea 5. A continuación, d_2 es 3 si y sólo si 2 es elemento de la parte. Si no lo es, hacemos que sea 5. Etc.... En general, d_n es 3 si y sólo si n pertenece a la parte que consideramos. De otro modo, es 5. (Cualquier otro par de números, siempre y cuando ninguno de los dos sea 9, podría realizar aquí el trabajo del 3 y del 5).

Es fácil ver que de esta forma tenemos, para cada parte de N, un real único de S. Por supuesto, no podremos construir todos los reales de S, pero eso no importa, porque no estamos demostrando la coordinabilidad de P(N) y S. Lo que sí queda demostrado es que P(N) es coordinable con una parte de S, y en consecuencia que S es más fuerte que P(N).

Demostramos ahora que P(N) es más fuerte que S. Pero primero hemos de saber que todo número puede ser representado con sólo dos dígitos, el 0 y el 1, en lo que se llama el sistema binario, contraponiéndolo así al sistema decimal que corrientemente usamos. Las ventajas del sistema decimal se derivan principalmente del hecho de que tenemos diez dedos. Las computadoras, en cambio, que no tienen dedos, usan el sistema binario.

La siguiente tabla muestra la correspondencia entre los primeros ocho enteros positivos, expresados en el sistema decimal y binario respectivamente:

1	1	7	111
2	10	8	1000
3	11	....	
4	100	....	
5	101	....	
6	110	....	

Con esta información a la mano, consideramos la siguiente correspondencia: A cada real de S, expresado en el sistema binario: $0.\ d_1\ d_2\ d_3\ d_4\ d_5 \ldots$

En donde cada d es 1 o 0, le hacemos corresponder la parte de N que contiene al 1 si y sólo si d_1 es 1. Contiene al 2 si y sólo si d_2 es 1. Contiene al 3 si y sólo si d_3 es 1. Etc... En general, le hacemos corresponder la parte de N que contiene todos los n tales que d_n sea 1.

Sólo un número ofrece dificultad, el 0.00000... Obviamente, según el criterio de arriba, la parte de N que le corresponde es la parte vacía, la nada con la que no queremos meternos y que se nos ha vuelto a colar. El problema, sin embargo, se resuelve muy sencillamente: Sacamos el 0 de S. Como ya sabemos que S es infinito, no pasa nada grave quitándole un elemento. Ni siquiera nada trivial, para nuestros propósitos.

Tampoco aquí tenemos una coordinabilidad entre S y P(N). Muchos elementos de P(N) pueden quedar sin pareja, pero eso no importa, porque nos basta haber encontrado una coordinabilidad entre S y una parte de P(N). Esto significa, por definición, que P(N) es más fuerte que S.

Uniendo los dos resultados, el teorema de Shröder y Bernstein nos asegura que S y P(N) son coordinables, y en consecuencia que tienen el mismo número cardinal. Como el de P(N) es aleph-uno, igualmente lo es el de S.

A la parte S de R se le llama, por ciertas propiedades que tiene y con las cuales no queremos meternos aquí, el **continuo.** Por esta razón se le llama a aleph-uno la fuerza o potencia del continuo. Puede que no sea mucha, hablando en términos extremadamente relativos, pero su importancia es sólo comparable a la de aleph-cero.

XII

LA CASCARA DE NUEZ

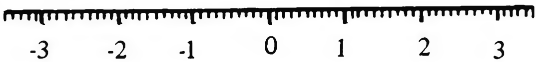
En este capítulo hacemos una transición, muy suave y natural, del mundo aritmético de los números reales en el que estábamos, al mundo geométrico de los puntos. El puente es la famosa correspondencia que está en la base de la geometría analítica y que en la filosofía kantiana hermanaba al espacio (geometría) con el tiempo, (aritmética).

Ambos mundos, el de los números y el de los puntos, son mundos ideales, mentales, con todo lo que eso tiene de bueno y de malo. No hay puntos ni números en la naturaleza. Pero los puntos, y lo que con los puntos puede hacerse, tienen una gran ventaja sobre los números, y es que se pueden representar gráficamente, e incluso tactilmente, como pinchazos de la pluma o del lápiz. Tanto más afilados, mejor la representación.

Con puntos podemos hacer lineas, que también son fácilmente representables como trazos. Con las líneas podemos hacer figuras, planos, y con las figuras y los planos, cuerpos sólidos y espacios. Hablar del espacio siempre es interesante. La vivencia que de él tenemos es sólo comparable a la del tiempo. Y seguramente es más fuerte que la del tiempo, porque es en el espacio donde tenemos nuestro cuerpo, la principal cuchara de la vida.

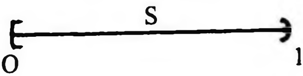
La correspondencia famosa de la que hablábamos es la que existe entre el conjunto R de los números reales y la aparentemente sencilla y modesta recta:

Que se supone no termina por ninguno de ambos lados. Concebida esta recta como un conjunto de puntos, decidimos que cualquiera de ellos represente al real 0.A una distancia cualquiera del 0 hay un punto, y a ese punto le llamamos 1. A la misma distancia del 1, y en el mismo sentido, encontramos el punto que va a representar al 2, y de este mismo modo encontramos el 3, el 4, etc... Hacemos lo mismo en el sentido opuesto, encontrando así los enteros negativos. De este modo logramos representar por un punto único cada real, porque los racionales y los irracionales habrán quedado, automáticamente, en un sitio bien determinado.



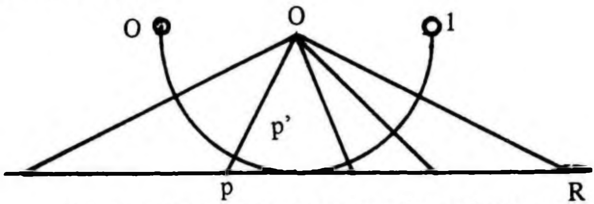
Lo interesante es que de este modo hemos logrado mucho más que una simple coordinabilidad entre los puntos de la recta y los números reales: La estructura entera de los reales, y es una estructura bien compleja, queda reflejada en la recta. Por ejemplo, "ser mayor que" se traduce o representa por "estar a la derecha de". La suma, el producto, todo lo que podemos hacer con los reales, puede hacerse igualmente con los puntos de la recta de modo tal que un simple diccionario puede traducir todo nuestros conocimientos de los reales a conocimientos sobre puntos. Por eso mismo, a la recta en cuestión se le llama **recta real**. Viene, pues, a ser lo mismo hablar de la recta real que de R, o hablar de números reales que de puntos en la recta real, a la que también denotamos con una R.

Para demostrar que el conjunto de los reales comprendidos entre el 0 y el 1, y que en este capítulo seguiremos llamando S, es coordinable con R, demostramos, en virtud de esta correspondencia de la que hablamos, que el segmento de recta:



Al que también llamamos S, es coordinable con la recta entera.

Para ello, le quitamos a S nuevamente el punto 0 y la doblamos hasta que forme una semicircunferencia, de centro 0, que apoyamos tangencialmente en la recta R:

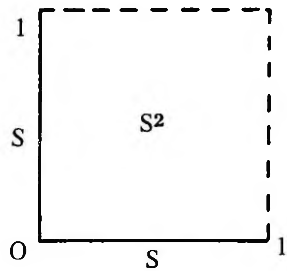


La coordinabilidad entre S y R queda asegurada por la correspondencia de uno a uno que determinan los rayos que unen el centro O con cada uno de los puntos de R. En efecto, cada rayo asocia todo punto p de R con un punto p' de S, y recíprocamente. R, en consecuencia, concebida ahora como el conjunto de los números reales, es infinita y con cardinal aleph-uno.

Como sabemos que el conjunto de los racionales es infinito enumerable, y que los reales son los racionales más los irracionales, queda automáticamente demostrado que existen números irracionales, aunque no conociéramos ninguno. Y no sólo eso, sino también que el conjunto de los irracionales tiene la potencia de aleph-uno. Porque si tuviera la de aleph-cero, como sabemos que la unión de dos conjuntos infinitos enumerables es infinita enumerable, también los reales serían infinito enumerable, contradiciéndose el resultado al que acabamos de llegar. Hay,pues, infinitamente más números irracionales que racionales, y esto es muy extraño, puesto que casi todos los números con los que tenemos que habérnosla ordinariamente son racionales. Alguien ha dicho, contagiándose de la poesía que hay en todo esto, que si los racionales fuesen puntos brillantes y los irracionales puntitos negros, los racionales se destacarían sobre los irracionales como las estrellas sobre el fondo oscuro de la noche.

Lo mismo puede decirse de los números trascendentales, de los que conocemos bien únicamente dos, π y e, base natural este último de los logaritmos: Tienen la potencia de aleph-uno, puesto que se puede demostrar que los números reales no trascendentales, los llamamdos números algebraicos, solución de una ecuación algebraica, tienen la potencia de aleph-cero.

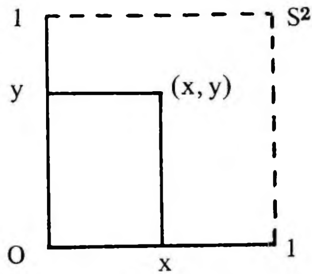
Cuando Cantor andaba en busca de un infinito más fuerte que el del continuo, aleph-uno, se le ocurrió que podría hallarlo, y es una ocurrencia perfectamente lógica, en la superficie siguiente, que llamaremos S^2, y que concebimos también como un conjunto de puntos:



Obviamente, si en uno sólo de los lados de esta figura había una cantidad aleph-uno de puntos, en la superficie entera tendría que haber muchos más. El esfuerzo de Cantor desplegado hacia la búsqueda de la prueba de que S^2 y S no eran coordinables, resultó vano. Pidió ayuda. Le contestaron que no había por qué demostrar eso, puesto que era evidente. Cantor, sin embargo, consciente de que trabajaba con un tema en donde había que guiarse por la razón y no por la evidencia, siguió insistiendo. Cuando encontró la prueba, no de que no eran coordinables, sino de que sí lo eran, exclama en una carta a Dedekind: "Lo veo, y no lo creo".

La prueba de esta cosa increíble que tanto conmovió a Cantor, a pesar de que para esa etapa de sus investigaciones ya debía estar habituado a las rarezas del infinito, es la siguiente.

Podemos representar cada puntos de S^2 por un par (x, y), donde x e y son puntos de S, como lo ilustra el diagrama:



Como x e y pueden ser considerados como números reales expresados con una expansión infinita de decimales, podemos hacer la siguiente correspondencia: Asociamos a cada par (x,y) de S^2, donde

$$x = 0.\ d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \ldots$$

$$y = 0.\ e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 \ldots$$

el número real z elemento de S:

$$z = 0.\ d_1 e_1 d_2 e_2 d_3 \ldots$$

Y recíprocamente, dado un z elemento de S:

$$z = 0.\, d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 d_8 \ldots$$

podemos hallar el par (x,y) que le corresponde en S^2:

$$x = 0.d_1\ d_3\ d_5\ d_7\ \ldots$$

$$y = 0.d_2\ d_4\ d_6\ d_8\ \ldots$$

Se impone aquí un detalle para el lector meticuloso. El criterio es impecable para pasar de cada real de S a un par de reales de S^2. Pero no al revés, porque un real z de S podría tener como pareja un par de reales en S^2 uno de los cuales tiene una sucesión infinita de nueves. Y se recordará que hemos descartado tales expresiones. Por ejemplo, un

$$z = 0.\ 1\ 1\ 9\ 2\ 9\ 4\ \ 9\ 8\ 9\ 3\ 9\ 9\ 9\ 6\ 9\ 3 \ldots$$

Da:

$$x = 0.\ 1\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ \ldots$$

$$y = 0.\ 1\ 2\ 4\ 8\ 3\ 9\ 6 \ldots$$

Para evitar esta falla modificamos la parte pertinente de la prueba considerando como un bloque cada decimal 9 junto con todc decimal diferente de 9. Si hay varios nueves seguidos, se los considerará en el mismo bloque. De este modo, el z de arriba: $z = 0.\ 1\ 1\ 92\ 94\ 98\ 93\ 9996\ 93 \ldots$

Da:

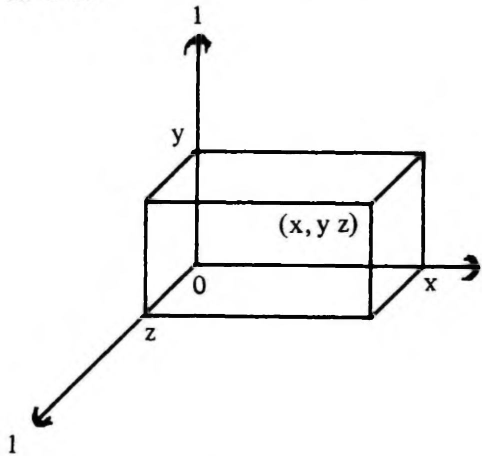
$$x = 0.1\,92\,98\,9996\ldots$$
$$y = 0.1\,94\,93\,93\ldots$$

Otra forma más elegante de salvar este escollo es el siguiente: Con cada elemento de S hacemos un par uniendo en cada caso ese elemento con O. A esta colección de pares la llamamos S'. Es obvio que S y S' son coordinables, porque habrá tantos elementos en S como pares en S'. Como S', por otro lado, es parte de S^2, en virtud de un teorema previo, S^2 es más fuerte que S', y en consecuencia que S. Ahora vamos a demostrar que S es más fuerte que S^2 para que el teorema de Shröder y Bernstein nos dé el resultado final. Este segundo paso es bien fácil.

Aprovechamos la parte impecable de la prueba original para demostrar que puedo unir cada par (x,y) de S^2 con un elemento único z de S. Esto nos dice que S es más fuerte que S^2. Si esto nos desagrada porque ya sabemos que hemos ocupado todos los elementos de S, no tenemos más que añadirle un elemento cualquiera a S, o quitárselo a S^2, da lo mismo. Como ambos son infinitos, uno más o uno menos ni les añade nada ni les quita.

No nos habríamos detenido tanto en esta prueba si no fuera por la generalización sorprendente que puede hacerse de ella. En efecto, como ya vimos que S era coordinable con R, este mismo teorema afirma la coordinabilidad de S^2 con R, e igualmente con R^2, que es el plano entero, el espacio entero bidimensional, con R.

Y lo mismo con el espacio tridimensional, cuyos puntos pueden concebirse como ternas (x,y,z). Cada trío de estos puede darnos un número real w, y cada w un trío.



$$
\begin{aligned}
x &= 0.\,d_1\ \ d_2\ \ d_3\ \ d_4\ \ \ldots \\
y &= 0.\,e_1\ \ e_2\ \ e_3\ \ e_4\ \ \ldots \\
z &= 0.\,f_1\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_4\ \ \ldots
\end{aligned}
$$

$$
w = 0.\,d_1\ e_1\ f_1\ d_2\ e_2\ \ \ldots
$$

$$
w = 0.\,d_1\ \ d_2\ \ d_3\ d_4\ d_5 \ldots
$$

$$
\begin{aligned}
x &= 0.\,d_1\ \ d_4\ \ d_7\ d_{10} \ldots \\
y &= 0.\,d_2\ \ d_5\ \ d_8\ d_{11} \ldots \\
z &= 0.\,d_3\ \ d_6\ \ d_9\ d_{12} \ldots
\end{aligned}
$$

La técnica de demostración es exacta a la del espacio de dos dimensiones. ¡Todo el espacio tridimensional es coordinable con el que hay encerrado en una cáscara de nuez! Y éste último con S. Todos tienen la misma potencia, el mismo cardinal aleph-uno. Hay tanto espacio dentro de la cáscara de una nuez como en el universo entero. Por supuesto es un espacio infinito, y de un infinito más rico que el enumerable, pero no tanto como aleph-dos, por ejemplo.

La generalización que hemos hecho de dos a tres dimensiones no tiene por qué detenerse en tres. Cualquier espacio n dimensional, donde n puede ser, no digamos 4, cualquier número finito por muy grande que sea, tiene como cardinal a aleph-uno. n puede ser, incluso, un número infinito, siempre y cuando, por razones que saldrán después, sea aleph-cero. ! Hasta un espacio de un número infinito de dimensiones cabe dentro de la cáscara de una nuez!

Como ya sabemos que la recta real, el plano y el espacio tridimensional tienen la fuerza de A_1, resulta, por el teorema de Cantor, que el conjunto de todas las partes de cualquiera de estos espacios, unidimensional, bidimensional o tridimensional, tiene como cardinal a aleph-dos, A_2. La cantidad de segmentos, pues, o de figuras planas, o cuerpos tridimensionales posibles, tiene una fuerza extraordinaria. El repertorio de universos está increíblemente bien surtido. Hay una cantidad infinita A_2 de objetos espaciales infinitos A_1. Vivimos, o por lo menos pensamos, y me gustaría decir que sentimos, en un mundo infinito en el que todo es infinito.

No importa que los físicos nos digan que el universo es finito. Están hablando como agrimensores. Lo que quieren decirnos es que una recta trazada indefinidamente, para medirla luego, tarde o temprano regresa al punto de arranque, vapuleada, torcida, distorcionada por los campos de fuerza que ha tenido que atravesar. Igualmente se ha computado con precisión el número de electrones que hay en el universo entero. Es un número miserable de apenas 79 dígitos. Nuestro universo será finito para los agrimensores y los contables, pero en una hoja de papel como en la que en este instante escribo, hay un espacio infinito innumerable que se lo puede habitar con una cantidad aleph-dos de cosas.

El alcance de este libro no da para un comentario más detallado de aleph-dos. De todos modos, ya hemos sobrepasado, y además infinitamente, el tope de las posibilidades óptimas de lo humano, el de aleph-cero. Es suficiente para una mera introducción. Pero que sepa el lector que hemos pisado sólo los tres primeros peldaños de una escalera que asciende sin fin.

XIII

ARITMETICA DE DIOS

Para poder manipular los números infinitos, tres de los cuales conocemos ya, con la misma soltura con la que tratamos aritméticamente los números finitos, debemos ampliar la aritmética conocida. Esto implica tener que redefinir la suma y el producto, que son las dos operaciones básicas, de forma tal que los números infinitos tengan cabida sin contradecir la aritmética finita. Después de todo, no queremos que el precio de poder sumar y multiplicar lo que en nuestro haber y deber haya de infinito, sea el no poder hacer la modesta pero importante contabilidad de nuestros centavos, los electrones del sol, los días que nos restan y tanta cosa finita con las cuales tenemos que habérnosla.

La suma, entonces, se la define así: Sean a y b dos cardinales cualquiera, finitos o infinitos, cardinales de los conjuntos A y B respectivamente sin nada en común entre ellos. Entonces

$$a + b$$

es el cardinal del conjunto que resulta de unir A con B.

Está claro que, para cualquier cardinal a, b:

$$a + b = b + a$$

Porque da lo mismo unir A con B que B con A.

Igualmente debe ser obvio que, para todo cardinal a, b, c:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Además, también conservamos:

$$a + 0 = a$$

Para cualquier cardinal a. Porque se recordará que 0 es el cardinal del problemático conjunto vacío, y el resultado de añadirle nada a algo es el mismo algo del que partimos.

Hasta aquí, todo es igual con la aritmética conocida. Esta definición de la suma salva las propiedades fundamentales de los cardinales finitos, e introduce, para los infinitos, las siguientes:

Si a es un cardinal infinito y n uno finito,

$$a + n = a$$

La razón de esto es que, como se demostró, todo conjunto infinito se traga cualquier finito sin alterarse. Se ve claro que esta es una generalización del teorema anterior. Y aún puede generalizarse más con el siguiente, que damos sin demostración:

Para cualquier cardinal a, b, uno de los cuales por lo menos es infinito,

$$a + b = c$$

Donde c es el cardinal más fuerte de los dos.

Por último, se demostró los teoremas de los que puede inferirse inmediatamente que, en particular para aleph-cero, A_0, y aleph-uno, A_1:

$$A_0 + A_0 = A_0$$

$$A_1 + A_1 = A_1$$

En este caso, el teorema anterior es una generalización de éste. Como también lo es del siguiente: Para cualquier cardinal infinito a,

$$a + a = a$$

Un número infinito cualquiera más ese número infinito, es el mismo número infinito. Y esto aun cuando se repitiera la operación cualquier número de veces, finito o incluso infinito. Siempre y cuando este último infinito sea a lo sumo de la misma fuerza del que se está sumando. Es decir, para cualquier número infinito a,

$$\underbrace{a + a + a + a + a + \ldots = a}_{\text{Un número finito de veces o infinito a lo sumo } a.}$$

Esta es una proposición que debería gustarle mucho a los teólogos. En algún capítulo anterior demostramos el caso particular para aleph-cero cuando probamos que la unión enumerable de conjuntos infinitos enumerables, era infinita enumerable.

La demostración, para un número finito n de veces, es muy fácil por inducción matemática si contamos con el teorema previo de que $a + a = a$, donde a es un cardinal infinito.

En efecto, para $n = 1$ el teorema es verdad: $a = a$. Suponemos ahora que es verdad también para un número natural k cualquiera:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k = a$$

De aquí se deduce inmediatamente que también es verdad para el número siguiente k + 1. Sólo hay que sumarle a a los dos mimebros de la ecuación:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + a_{k+1} = a + a$$

Porque esto, en virtud del teorema anterior, da

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{k+1} = a$$

En consecuencia, el teorema es verdad para cualquier n finito.

El producto, por otra parte, se lo define así: Sean a y b dos cardinales cualquiera, finitos o infinitos, cardinales de los conjuntos A y B respectivamente. Entonces

$$a \cdot b$$

es el cardinal del conjunto cuyos elementos son todos los pares posibles (x, y) donde x pertenece a A e y a B.

Así definido el producto para cardinales, se puede demostrar, (no lo hacemos aquí), que para cualquier cardinal a, b. c:

$$a.b = b \cdot a$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$a \cdot 1 = a$$
$$a \cdot 0 = 0$$

Y además, un detalle muy importante para poder ligar las dos operaciones:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Las demás propiedades, que solamente enunciamos, corresponden exactamente a las de la suma:

Si a es un número infinito y n finito:

$$a \cdot n = a$$

si a y b son cardinales, uno de los cuales por lo menos es infinito:

$$a \cdot b = c$$

Donde c es el de mayor fuerza de ambos.

Uniendo este resultado con el correspondiente de la suma, se tiene algo muy curioso: Si a y b son dos cardinales, uno de los cuales por lo menos es infinito, entonces

$$a + b = a \cdot b$$

Es decir, que aparentemente da lo mismo sumar que multiplicar cuando por lo menos uno de los números es infinito. Ya veremos que esto es así sólo cuando la operación se realiza un número finito de veces.

Para aleph-cero y aleph-uno, en particular, tenemos:

$$A_0 \cdot A_0 = A_0$$

$$A_1 \cdot A_1 = A_1.$$

La demostración de que $A_0 \cdot A_0 = A_0$ puede llevarse a cabo probando que el conjunto de todos los pares posibles de números naturales es infinito enumerable. Y esto se puede probar considerando cada par (p, q), donde p y q son naturales, como una fraccción p/q. Como ya se ha demostrado en el capítulo V que todas las fracciones positivas son infinito enumerable, la prueba está terminada.

La demostración de que $A_1 \cdot A_1 = A_1$ es igualmente sencilla. Sabemos que $A_1 = 2^{A_0}$. Luego

$$A_1 \cdot A_1 = 2^{A_0} \cdot 2^{A_0} = 2^{A_0 + A_0} = 2^{A_0} = A_1$$

Por una ley conocida de exponentes y el teorema donde se afirma que $A_0 + A_0 = A_0$

Y en general, para cualquier cardinal infinito a:

$$a^2 = a$$

También, si a es infinito:

$$a^n = a$$

Donde n es finito, o infinito pero de una fuerza estrictamente menor que la de a. Por ejemplo:

$$A_1^{A_o} = (2^{A_o})^{A_o} = 2^{A_o \cdot A_o} = 2^{A_o} = A_1$$

En el momento en que n tenga la misma fuerza que a, la igualdad desaparece, por el teorema de Cantor. Esta es la razón por la cual la suma y el producto, infinitamente repetidos, no da el mismo resultado. Por ejemplo:

$$\underbrace{A_o + A_o + A_o + A_o + \ldots}_{A_o \text{ veces}} = A_o$$

Pero:

$$\underbrace{A_o \cdot A_o \cdot A_o \cdot A_o \ldots}_{A_o \text{ veces}} = A_1$$

Igualmente aquí, sobre el teorema $a^2 = a$, donde a es infinito, se puede demostrar por inducción matemática que $a^n = a$ para cualquier n natural. En efecto, para $n = 1$, $a^1 = a$. Por otra parte, es verdad para un número natural k cualquiera:

$$a^k = a$$

Entonces es verdad para $k+1$, (multiplicando por a ambos miembros):

$$a^k . a = a^{k+1} = a . a = a$$

No podemos definir la resta ni la división para cardinales infinitos. Pero ni siquiera al nivel finito pueden realizarse siempre estas operaciones. Por ejemplo, no podemos restarle 7 al 3, ni dividir el 7 por el 3. Sólo podemos restar y dividir en los casos especiales en los que el número que se resta o que divide es menor o factor, respectivamente, del otro número. Por ejemplo, podemos restarle 3 al 7 y dividir el 9 por el 3.

Como para cualquier a, b, finitos, a y b son ambos menores o iguales que $a+b$ y factores de $a.b$, de

$$a+b=c$$

podemos inferir que $a = c - b$

Y de $a.b = c$

si b es diferente de 0, que

$$a = c/b$$

En cambio, esto no es posible con los números infinitos. Por ejemplo, de

$$n + A_1 = A_1$$

$$A_o + A_1 = A_1$$

$$A_1 + A_1 = A_1$$

donde n es finito, se obtendría, respectivamente:

$$n = A_1 - A_1$$

$$A_o = A_1 - A_1$$

$$A_1 = A_1 - A_1$$

Que equivale a decir que todo número finito es igual a aleph-cero y a aleph-uno, y que los tres son 0. Otro tanto sucede con el producto. De

$$n . A_1 = A_1$$

$$A_o \cdot A_1 = A_1$$

$$A_1 \cdot A_1 = A_1$$

Se obtendría

$$n = A_1 / A_1$$

$$A_o = A_1 / A_1$$

$$A_1 = A_1 / A_1$$

Que equivale al absurdo correspondiente.

Con los números finitos, además, podemos siempre simplificar, tanto en la suma como en el producto. Es decir, de

$$a + b = c + b$$

$$a.b = c.b$$

inferimos, respectivamente, que

$$a = c$$

Pero no podemos simplificar con los números infinitos. Por ejemplo, de

$$A_o + A_1 = n + A_1$$

$$A_o \cdot .A_1 = n.A_1$$

donde n es un número finito, el absurdo de que

$$A_o = n$$

Y está bien aceptar lo raro, la tercera dimensión lo fue una vez, pero no lo absurdo.

La aritmética infinita es rara, muy extraña, pero perfectamente lógica, funciona con toda precisión. Y sobre todo, nos deja intacta la aritmética finita que ya conocíamos y que necesitamos en el mundo, a la vez que nos permite sacar nuestras cuentas y nuestro balance final en cualquier asunto, o negocio infinito como le llamarían los jesuitas, en el que estemos interesados y en donde la ganancia, y la pérdida, sean infinitas.

XIV

ZONA MINADA

Hay que reconocer que el camino que hemos andado, si bien a ratos se volvía difícil, tortuoso y contra el sentido común, en todo momento daba la sensación de firme y seguro. Esta impresión es falsa. La hemos tenido únicamente porque no veíamos hacia los lados y porque, ya a más de medio siglo de Cantor, hay muchos libros que nos guían de la mano.

Ahora vamos a deshacernos de esa impresión. No para echar por tierra todo lo que se ha construído, sino para tomar conciencia de los barrancos lógicos, las trampas y huecos del itinerario y, justamente, no caer en ellos.

Desde un principio advertimos que para el lógico la paradoja no tiene ningún chiste, porque una paradoja tiene la forma de una contradicción, y la contradicción, lo veremos más abajo, es la muerte inmediata del sistema en el cual aparece. La teoría del infinito está llena de paradojas. Justamente, Bolzano, un teólogo matemático checoslovaco, predecesor de Cantor en estas investigaciones, publicó todo un libro sobre ellas llamado **Las paradojas del Infinito.**

En este capítulo vamos a ver algunas de ellas y señalaremos apenas el hilo que habría que seguir para considerarlas solamente paradojas, es decir, contradicciones aparentes y no contradicciones auténticas. De ser esto último, la teoría entera del infinito se descalabra.

Una contradicción no es solamente una falsedad, es mucho peor, es un cáncer que malea al sistema entero en el que surge. Basta una contradicción en un sistema, por muy trivial y juguetona que aparente ser, para que el sistema entero pierda automáticamente sentido, porque absolutamente todo, indiscriminadamente, se hace demostrable.

Esto se puede probar así: Supongamos que un sistema afirma, contradictoriamente, que es verdad p y no-p, donde p es una proposición cualquiera.

Entonces, si p es verdad. es igualmente verdad la proposición compuesta p o q, donde q es una proposición cualquiera. Porque una disyunción es verdadera cuando alguno de sus términos, en este caso p, es verdadero. Ahora bien, como sabemos por otra parte que también no-p es verdad, p es falso. Y si p es falso y ya sabemos que p o q es verdad, podemos concluir en que q es verdad. Porque si una disyunción es cierta y uno de sus términos, p, es falso, el otro término, q, debe ser por fuerza verdadero. En resumen, partiendo de una contradicción cualquiera p y no-p, se puede demostrar que es verdad q, una proposición cualquiera. Es decir, una contradicción lo implica todo. Un sistema con una contradicción puede demostrarlo todo, por muy absurdo y ridículo que sea, y no tiene, por tanto, sentido. No sirve.

Con esta terrible advertencia, veamos algunas de las paradojas del infinito. En primer lugar, la célebre de Russell. Es una de las más graves porque está en la base de todo: nada menos que en la mismísima noción de conjunto, que ya más diáfana no puede ser.

Un conjunto puede ser miembro de sí mismo y puede no serlo. Por ejemplo, el conjunto de las ideas abstractas es una idea abstracta, y en consecuencia miembro del conjunto de las ideas abstractas, es decir, de sí mismo Por otra parte, el conjunto de los granos de arena de una playa no es un grano de arena de esa playa, luego no es elemento de sí mismo.

Como casi todos los conjuntos son de esta última clase, vamos a llamarles **ordinarios**. Será ordinario, pues, todo conjunto que no sea elemento de sí mismo. En cambio, llamémosle no–ordinarios, o **extraordinarios**, después de todo son los más raros, a los conjuntos que sí se contienen a sí mismos. Es decir, a los de la primera clase. El conjunto de las ideas abstractas, pues, es un conjunto extraordinario, pero el conjunto de los granos de arena de una playa es ordinario. Es obvio que todo conjunto va a pertenecer a una de estas dos clases.

Todo hace sospechar que la paradoja va a surgir del lado de los conjuntos extraordinarios. No es así. El problema está con los ordinarios. Efectivamente, reunámoslos a todos mentalmente y tendremos el conjunto de todos los conjuntos ordinarios. Llamémosle 0. Y ahora, para tropezarnos de bruces con la paradoja, nos preguntamos si 0 es ordinario o extraordinario. Resulta que es las dos coasas a la vez, lo cual es imposible.

En efecto, si 0 es ordinario, pertenece a 0, porque todo conjunto ordinario pertenece a 0. Pero si 0 pertenece a 0, 0 pertenece a sí mismo, y en consecuencia es extraordinario. En resumen, si 0 es ordinario, entonces es extraordinario.

Por otra parte, si 0 es extraordinario, 0 pertenece a sí mismo y en consecuencia a 0, pero dentro de 0 sólo hay conjuntos ordinarios, luego 0 es ordinario. En resumen, si 0 es extraordinario, entonces es ordinario.

Estos dos resultados se pueden sintetizar en la proposición: 0 es ordinario si y sólo si es extraordinario. Y esto es equivalente a decir que 0 es ordinario y extraordinario a la vez. Lo cual es contradictorio.

Lo grave de esta paradoja es que no se ha empleado en el camino a ella ningún raciocinio complejo ni noción complicada al amparo de los cuales se haya colado el error. Y sin embargo, el error se ha colado. De no ser este el caso, tendríamos no una paradoja sino una contradicción. ¡Y una contradicción en la base no sólo de la teoría del infinito sino en la de toda la matemática moderna, que descansa en la noción de conjunto!

Las tres siguientes paradojas contradicen todas el teorema de Cantor. La primera atenta, al igual que la que acabamos de presentar, contra la noción de conjunto de todos los conjuntos. La segunda, contra la definición de número cardinal que da Cantor. Y la tercera, contra la definición de Frege. Por todos lados hay problema.

Un forma sencilla de presentar la primera es ésta: Es obvio que el conjunto de todos los conjuntos tiene el cardinal más fuerte de todos. Sin embargo, el teorema de Cantor demuestra que existe un cardinal estrictamente más fuerte que ése, a saber, el del conjunto de todas las partes del conjunto de todos los conjuntos.

Otra forma de presentar esta paradoja es ésta. Llamémosle C al conjunto de todos los conjuntos. Toda parte de C es un conjunto, y en consecuencia, elemento de C. Esto equivale a decir que todo elemento de P(C) es un elemento de C. En consecuencia, P(C) es parte de C. Se demostró oportunamente que si un conjunto es parte de otro, entonces es más débil que él. Luego, P(C) es más débil que C. Pero el teorema de Cantor dice que P(C) es estrictamente más fuerte que C, y estas dos afirmaciones se contradicen. La noción de conjunto de todos los conjuntos conduce, pues, a una contradicción con el teorema de Cantor.

Recordemos la definición de número cardinal de Cantor como el resultado de un proceso de doble abstracción sobre un conjunto característico, y veamos cómo nos lleva igualmente a una contradicción con el teorema de Cantor.

Consideremos el conjunto de todos los cardinales. Para cada uno de estos cardinales existe un conjunto característico del cual hemos abstraído el cardinal correspondiente. Podemos considerar que estos conjuntos no tienen nada en común sin perder generalidad. Los unimos todos para formar un conjunto y le llamamos A a esta unión. Es obvio que el cardinal de A es la suma de todos los cardinales. Formamos ahora P(A) y abstraemos su cardinal. Este cardinal es menos fuerte que el de A, porque el de A es la suma de todos. El teorema de Cantor, sin embargo, afirma que el cardinal de P(A) es estrictamente más fuerte que el de A.

Por último, y ésta es la más difícil, veamos cómo tampoco se salva la definición de Frege.

Recordamos que para Frege el número cardinal de un conjunto era el conjunto de todos los conjuntos coordinables con él.

Sea A un conjunto cualquiera y a su cardinal, es decir, a es el conjunto de todos los conjuntos coordinables con A. Como a es un conjunto, formamos P(a). Llamémosle x, y, z, ... , a los elementos de P(a). Y ahora unimos cada elemento de A con x, para formar un conjunto, que llamamos A_x, de pares. Lo mismo hacemos con y, z, w, ...,de P(a), para formar A_y, A_z, A_w,. . cada uno de los cuales es coordinable con A. Reunimos todos estos conjuntos como A_x en una colección, que llamaremos F. F es coordinable con P(a), pues hay tantas A con subíndice como subíndices. Luego, el cardinal de F es igual al cardinal de P(a). Como todos los elementos de F son coordinables con A, todos los elementos de F son elementos también de a, que es la colección de todos los conjuntos coordinables con A. Luego, F es parte de a. Luego el cardinal de F es menos fuerte que el cardinal de a, es decir, que el cardinal del cardinal de A. Como ya vimos que el cardinal de F es igual al cardinal de P(a), el cardinal de P(a) es menos fuerte que el cardinal de a, contradiciéndose nuevamente el teorema de Cantor, que afirma que el cardinal de P(a) es estrictamente más fuerte que a.

Hay varias formas de declarar ilegítimos todos estos raciocinios , y en consecuencia válida la teoría contra cuyos cimientos atenta. En general, consisten en no considerar como conjuntos ciertas colecciones, como la colección de todos los conjuntos, o en establecer ciertas restricciones, como la de que un conjunto no pueda ser elemento de sí mismo. Todas estas formas de saneamiento son difíciles y requieren un gran esfuerzo que los lógicos y los matemáticos han preferido no regatear antes de privarse de una de las teorías más bellas de todos los tiempos. Por esta razón, y para que el lector se sienta en la necesidad de perseguir el tema en libros más serios que éste, no hay mejor forma de concluirlo que dejándolo inconcluso, así, abruptamente, en la mitad del peligro de que se le desplome la morada infinita en la que hay que suponer comenzaba a habituarse y a "prepararse"

XV

CANTOR

Un breve epílogo para Georg Cantor. Nace en 1845 en San Petersburgo, de padre danés y madre rusa. Su vida, sin embargo, transcurre en alemania.

A los treinta años de edad descubre la pista que había de conducirlo a la creación de la teoría de conjuntos y en particular de los conjuntos infinitos. Sólo por su teoría de conjuntos. que resultó ser la base, el fundamento de la matemática, tendría el puesto que ocupa en la cultura mundial. Actualmente, nociones de esta teoría se dan ya desde la escuela primaria, pues se considera que es la vía más clara y la más cónsona con la esencia de la matemática.

Cantor se resiste al principio a publicar sus descubrimientos con relación al infinito. Era ir contra genios tan grandes como Gauss, que había dicho que el infinito no era más que "una mera forma de hablar". Pero, más amigo de la verdad que de Platón, termina por publicar sus papeles que son recibidos con el repudio natural. Particularmente Krönecker, que domina los niveles universitarios, se encarniza vilmente contra teoría tan audaz, y Cantor debe ver frustradas sus justas aspiraciones a una cátedra en la universidad de Berlín.

El hombre a quien le debemos la única idea clara del infinito, y en consecuencia la posibilidad de pensarlo y de vivirlo, muere loco en el año de 1918.

BIBLIOGRAFIA MINIMA

Breuer, Joseph; INTRODUCTION TO THE THEORY OF SETS, Prentice-Hall, New Jersey, 1958.

Cantor, Georg; CONTRIBUTIONS TO THE FOUNDING OF THE THEORY OF TRANSFINITE NUMBERS, Dover, New York.

Fraenkel, Abraham A; SET THEORY AND LOGIC, Addison-Wesley, Massachusetts,, 1966.

Halmos, Paul R.; NAIVE SET THEORY, Van Nostrand, Princeton, 1964.

Kamke, E.; THEORY OF SETS, Dover, New York, 1950.

APENDICE

CAPITULO PRIMERO

COORDINABILIDAD E INFINITUD

Definición 1.– (Coordinabilidad)

$$X \sim Y \Leftrightarrow \exists \; f{:}X \xrightarrow[\text{Sobre}]{1-1} Y$$

Proposición 1.–

La coordinabilidad es una relación de equivalencia:

a) $X \sim X$

b) $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$

c) $(X \sim Y \wedge Y \sim Z) \Rightarrow X \sim Z$

(a) por la aplicación idéntica. (b) porque la inversa de una biyección es una biyección. (c) porque la composición de biyecciones es biyección.

Proposición 2.–

$$(X \sim Y \wedge X \cap Z = \phi \wedge Y \cap Z = \phi) \Rightarrow X \cup Z \sim Y \cup Z$$

Como $X \sim Y, \exists f: X \xrightarrow[\text{Sobre}]{1-1} Y$. La aplicación $g: X \cup Z \to Y \cup Z$ definida de la siguiente forma, es una biyección: $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in X \\ I(x) \text{ si } x \in Z \end{cases}$

Proposición 3.–

La coordinabilidad es compatible con el producto cartesiano:

$$X \sim Y \Rightarrow XZ \sim YZ$$

Como $X \sim Y, \exists f: X \xrightarrow[\text{Sobre}]{1-1} Y$. La aplicación $g: XZ \longrightarrow YZ$ definida de la siguiente forma, es una biyección: $g(x,z) = (y, z) = (f(x), z)$.

Observación:

La coordinabilidad es compatible con el producto cartesiano y con la unión, en el caso de que se cumpla la condición de la proposición 2. Pero no es compatible ni con la intersección ni con la diferencia simétrica, porque Z puede intersectar uno de los conjuntos más profundamente que el otro.

Proposición 4.–

$XY \sim YX$

Se deriva de la existencia de la simetría canónica S, que es biyección y que se define: $S(x, y) = (y, x)$

Definición 2.– (Infinito)

X es **infinito** $\Leftrightarrow \exists X' \subset X, X' \neq X, X \sim X'$

Definición 3.– (Finito)

X es **finito** $\Leftrightarrow$ X no es infinito.

Proposición 5.–

IN es infinito.

Considérese $P = \{x \in \mathbb{N}: \exists y \in \mathbb{N}, x = 2y\}$ Es decir, el conjunto de los pares positivos. La aplicación $f: \mathbb{N} \longrightarrow P$, $f(x) = 2x$, es una biyección. Como $P \subset \mathbb{N}$ y $P \neq \mathbb{N}$, IN es infinito.

Observación:

Hay una infinidad de formas diferentes de probar la infinitud de IN: $f(x) = x^n$, $f(x) = x + n$, $n > 1$, etc. . .

Definición 4.– (Finito ordinario)

X es **finito ordinario** $\Leftrightarrow (X = \phi) \vee \exists n \in \mathbb{N}, X \sim \bar{s}(n))$, donde $\bar{s}$ es la aplicación segmento inicial débil definida así:

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\bar{s}} \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$\bar{s}(n) = \{x \in \mathbb{N}, x \leq n\}$$

Definición 5.– (Infinito ordinario)

X es **infinito ordinario** $\Leftrightarrow$ X no es finito ordinario.

Proposición 6.–

Todo conjunto coordinable con un conjunto infinito es infinito. Considérese el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, dashed, "h.\ g.\ f^{-1}"] \\ X' \arrow[r, "h"'] & Y' \end{tikzcd}$$

Donde h = f/X' . h . g . f^{-1} es biyección porque es composición de biyecciónes.

Proposición 7.–

Todo conjunto infinito contiene estrictamente una cantidad infinita de partes infinitas.

Sea X un conjunto infinito. Por definición, contiene estrictamente una parte X_1 con la cual es coordinable y que por la proposición anterior es infinita. En consecuencia, X_1 contiene a su vez una parte estricta X_2 con la cual es coordinable y que por la proposición anterior es infinita. Etc. . . .El conjunto $\{X_1, X_2, X_3, \ldots.\}$ de partes estrictas de X, todas ellas infinitas, es coordinable con IN, y en consecuencia infinito.

Proposición 8.–

Ningún segmento inicial débil de los naturales es coordinable con una parte estricta suya. Esto es: $\sim\exists\, n \in \mathrm{IN},\ \bar{s}(n) \sim \bar{s}(n)'$, donde $\bar{s}(n)'$ es parte estricta de $\bar{s}(n)$. Lo vamos a demostrar, por inducción matemática, en su forma equivalente: $\forall n \in \mathrm{IN}$, $\bar{s}(n) \not\sim \bar{s}(n)'$

La proposición es verdadera para $n = 0$, porque $\bar{s}(0) = \{0\}$ y su única parte estricta es ϕ, coordinable sólo consigo mismo. Supongamos que k satisface la proposición. Es decir: $\bar{s}(k) \not\sim \bar{s}(k)'$ Y, para razonar por absurdo, que $k + 1$ no la satisface, esto es, que $\bar{s}(k + 1) \sim \bar{s}(k + 1)'$ Entonces, existe una biyección f:

$$\begin{array}{lccccccc} & \bar{s}(k+1): & 0 & 1 & 2 & \ldots & k & k+1 \\ f & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ & \bar{s}(k+1)': & f(0) & f(1) & f(2) & \ldots & f(k) & f(k+1) \end{array}$$

$f(k + 1)$ puede o no ser igual a $k + 1$. Si lo fuera, basta suprimir los dos términos, $k + 1$ y $f(k + 1)$ para quedar con una biyección entre $\bar{s}(k)$ y $\bar{s}(k)'$, contradiciéndose la hipótesis de inducción. Si algún otro elemento de $\bar{s}(k + 1)'$ fuese $k + 1$, podemos cambiarlo de puesto con $f(k+1)$ y hacer la supresión. Si ningún elemento de $\bar{s}(k+1)'$ es $k+1$, eso quiere decir que todos sus elementos lo son de $\bar{s}(k)$, y podemos hacer la supresión sin perder la inclusión. En definitiva, podemos eliminar conjuntamente $k+1$ de $\bar{s}(k+1)$ y $f(k+1)$ de $\bar{s}(k+1)'$ de modo tal que $k+1$, si es que es elemento de $\bar{s}(k+1)'$ quede también eliminado, lográndose la coordinabilidad entre $\bar{s}(k)$ y $\bar{s}(k)'$, contradiciéndose la hipótesis.

Esta proposición puede también ser formulada así: Ningún segmento inicial débil de los naturales es infinito.

Proposición 9.–

IN es infinito ordinario.

Si fuese finito ordinario sería coordinable con un segmento inicial débil de los naturales. Como IN es infinito, este segmento también lo sería, por la proposición 6, contradiciéndose la proposición anterior.

Proposición 10.–

Si un conjunto es infinito, es infinito ordinario.

Sea X un conjunto infinito. X es finito ordinario o infinito ordinario. Si es finito ordinario, es coordinable con un segmento inicial débil de los naturales, que por la proposición 6 sería infinito, contradiciéndose la proposición anterior. Luego es infinito ordinario.

Proposición 11.–

Si un conjunto es infinito ordinario es infinito.

Sea X un conjunto infinito ordinario, y $f: \mathcal{P}(X) - \{\phi\} \longrightarrow X$ la función electiva que elige de cada parte un elemento.

$$f(X) = x_0$$

$$f(X - \{x_0\}) = x_1$$

$$f(X - \{x_0\} - \{x_1\}) = x_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f(X - \{x_0\} - \{x_1\} - \{x_2\} - \ldots - \{x_{k-1}\}) = x_k$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ f(X - \{x_0\} - \ldots - \{x_n\}) = \phi$, porque si no lo fuera X sería coordinable con $\bar{s}(n + 1)$, y en consecuencia finito ordinario, contradiciéndose la hipótesis.

Por inducción matemática podemos afirmar que el conjunto $X' \subset X$ de los elementos elegidos es coordinable con IN. $X' = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\} =$

$\{ x \in X: \exists n \in \mathbb{N}, x = x_n \}$. Definimos ahora una biyección $g: X \longrightarrow X - \{x_0\}$, de la siguiente forma:

$$g(x) = x_{n+1} \text{ si } x \in X'$$

$$g(x) = x \qquad \text{si } x \notin X'$$

Como $X - \{x_0\}$ es parte estricta de X, X es infinito.

Repárese en que X puede tener más elementos que X' y en consecuencia que el conjunto de los naturales.

Observación:

Las dos proposiciones anteriores pueden resumirse en la siguiente:

Un conjunto es infinito si y sólo si es infinito ordinario. Y en onsecuencia es finito si y sólo si es finito ordinario. Esta equivalencia nos permite trabajar con la noción que en determinado momento nos convenga más.

Proposición 12.–

Todo conjunto que contiene un conjunto infinito es infinito. Toda parte de un conjunto finito es finito.

Sea $X \subset Y$ y X infinito. Luego X no es coordinable con ningún segmento inicial débil de los naturales. Luego tampoco lo es Y, y eso lo hace infinito. Por contraposición , si Y es finito también lo es X.

CAPITULO SEGUNDO
INFINITUD ENUMERABLE

Definición 1.–(Enumerable e infinito enumerable)

Todo conjunto coordinable con una parte de IN se llama **enumerable** Si en particular es coordinable con IN, se llama **infinito enumerable**.

Observación:

Todo conjunto infinito enumerable es infinito. Porque IN es infinito y por proposición previa sabemos que si un conjunto es coordinable con uno infinito, es infinito.

Proposición 1.–

El conjunto de los números primos es infinito enumerable.

La prueba de esta proposición se debe a Euclides y se la lleva a cabo, por reducción al absurdo, con la noción de infinito ordinario.

Supongamos que P, el conjunto de los primos, sea finito ordinario. Entonces P, que podemos suponer ordenado de menor a mayor, es coordinable con un segmento inicial débil de los naturales $\bar{s}(k)$. El primo p_k, correspondiente al número natural k del segmento, es mayor que todos los demás. Formamos el número $A = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$, que por ser mayor que todo primo es compuesto. Descomponemos A en sus factores primos. Sea p un factor de A. Entonces:

$$A/p = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_k + 1}{p} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_k}{p} + 1/p$$

Esta fracción deja siempre el residuo 1/p, porque en el primer término del binomio se simplifica por p. Luego A no es múltiplo de p, y esto contradice el que p sea factor de A.

Proposición 2.–

El conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros es infinito enumerable.

En efecto, la aplicación $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{2} & \text{si x es par} \\ \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{si x es impar} \end{cases}$$

Es una biyección.

Proposición 3.–

El conjunto $\mathbb{Q}$ de los racionales es infinito enumerable.

Considérese la aplicación $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(p/q) = |p| + q$ no es ni suryectiva ni inyectiva: $0 \in \mathbb{N}$ no es imagen de ningún racional. Por otra parte, los racionales –1/4, 1/4, –2/3, 2/3, –3/2, 3/2, –4, 4, tienen la misma imagen 5.

Los conjuntos $f^{-1}(n)$, $n \neq 0$, constituyen una participación de $\mathbb{Q}$ y cada uno de ellos es finito. Por ejemplo, $f^{-1}(1) = \{0/1\}$, $f^{-1}(2) = \{1/1, -1/1\}$, $f^{-1}(3) = \{1/2, -1/2, 2/1, -2/1\}$ ... Ahora podemos ordenar cada uno de estos conjuntos en razón al tamaño del natural del cual son imagen por f^{-1}. Y cada uno de estos conjuntos lo podemos ordenar internamente, poniendo primero el negativo, de acuerdo a su valor absoluto. Es decir, tendremos la sucesión: –1/2, 1/2, –2, 2, –1/3, 1/3, –3, 3, –1/4, 1/4, –2/3, 2/3, ...

Proposición 4.–

El conjunto de los números algebraicos es infinito enumerable.

Un número algebraico es la raiz de una ecuación:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathrm{IN} - \{0\}$ y $a_n \neq 0$

Definimos como altura h de una ecuación algebraica:

$$h = n + a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$$

Ahora bien, para cada altura h existe un número finito de ecuaciones algebraicas y para cada ecuación algebraica de grado n, existen a lo sumo n raíces. Ordenamos estas raíces, números algebraicos, de la siguiente forma:

Atendemos primero las raíces de las ecuaciones de menor altura, entre éstas, las que lo son de ecuaciones de menor grado, entre éstas, las que son menores. Caso de ser imaginarias, atendemos primero las que tienen menor parte real. Caso de que tengan igual parte real, atendemos las que tengan menor parte imaginaria. De esta forma podemos formar una sucesión de los números algebraicos.

Observación:

Los números racionales son sólo una parte "pequeña" de los algebraicos, porque todo racional puede ser generado como raiz de una ecuación algebraica de primer grado: $qx - p = 0$, donde $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$. Porque de esta ecuación se obtiene $x = p/q$ que es la forma de todo racional.

Ecuaciones algebraicas de segundo grado, es decir, para $n = 2$, tienen como raíces números irracionales e imaginarios. Por ejemplo, la ecuación $x^2 - 2 = 0$ tiene como raiz el irracional $\sqrt{2}$. La ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$ tiene como solución $1 + i$, que es imaginario. Igualmente $x^2 + 1 = 0$.

Proposición 5.–

Existe una familia infinita enumerable de partes estrictas de IN, disjuntas dos a dos, cada una de las cuales es infinita enumerable y cuya unión de todas es infinita enumerable.

Considérese la familia $(A_n)_{n \in \mathrm{IN}}$ definida así:

$$A_0 = \{ x \mathrm{IN} : x = 0 \vee x \text{ es impar} \} = \{0, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$$

$$A_1=\left\{x\in \mathbb{N}: \exists\, y\in A_0-\{0\},\ x=2y\right\}=\{2, 6, 10, 14, \dots\}$$

$$A_2=\left\{x\in \mathbb{N}: \exists\, y\in A_1,\ x=2y\right\}=\{4, 12, 20, 28, \dots\}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad .$$

Cada A_n es infinito enumerable y parte estricta de IN. Todos son disjuntos dos a dos y la unión, infinita enumerable, de todos, es IN, que es infinito enumerable.

Proposición 6.–

La unión de una familia infinita enumerable de conjuntos infinitos enumerables, es infinita enumerable.

Sea $(X_n)_{n\in \mathbb{N}}$ una familia infinita enumerable tal que $\forall\, n\in \mathbb{N}$, X_n es infinito enumerable. Sea $(A_n)_{n\in \mathbb{N}}$ la familia de partes de IN que considerábamos en la proposición anterior. Como $\forall\, n\in \mathbb{N}$, A_n y X_n son infinitos enumerables, existe una biyección $f_n\colon A_n \longrightarrow X_n$ porque ambos son coordinables con IN y la coordinabilidad es transitiva. Entonces, la aplicación f definida así:

$\mathbb{N} \longrightarrow \bigcup X_n$, $\forall$ $x \in \mathbb{N}$, $f(x) = f_n(x)$ cuando $x \in A_n$, es una biyección. No importa que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sea o no disjunta dos a dos.

Observación:

La unión finita de conjuntos infinitos enumerables es infinita enumerable.

Podemos coordinar uno de los conjuntos con el de los pares positivos y otro con el de los impares positivos, puesto que sabemos que ambos son infinitos enumerables. Su unión está automáticamente coordinada con el conjunto de los naturales. Esto se puede generalizar, por inducción matemática, para cualquier número finito de conjuntos.

Proposición 7.–

El producto cartesiano de dos conjuntos infinitos enumerables es infinito enumerable.

Sean X e Y dos conjuntos infinitos enumerables. Su producto cartesiano XY se puede escribir:

$$XY = \bigcup_{y \in Y} (X \cdot \{y\})$$

Como X es infinito enumerable, cada $X \cdot \{y\}$ lo es, porque tiene tantos elementos como X. Puesto que Y es igualmente infinito enumerable, tenemos una unión infinita enumerable de conjuntos infinitos enumerables, que por la proposición anterior sabemos es infinita enumerable.

Proposición 8.–

Todo conjunto infinito contiene una parte infinita enumerable.

Ver la proposición 8 del capítulo primero. El conjunto X' es infinito enumerable.

Proposición 9.–

Si un conjunto contiene una parte infinita enumerable, es infinito.

En efecto, sea $X' \subset X$ y X' infinito enumerable. Podemos considerar sólo el caso de la inclusión estricta, porque si $X' = X$, X es infinito enumerable y en consecuencia infinito. No habría nada más que demostrar.

Como X' es infinito enumerable, es infinito, y en consecuencia ordinariamente infinito. Luego X' no es finito ordinario. Esto significa que no existe ningún $\bar{s}(n)$ coordinable como X' por muy grande que sea n. En consecuencia, tampoco puede existir ninguno coordinable con X, que contiene más elementos que X'. Luego X no es finito ordinario, luego es infinito ordinario, luego es infinito.

Observación:

Las dos proposiciones anteriores pueden sintetizarse en la siguiente:

Un conjunto es infinito si y sólo si contiene una parte infinita enumerable.

Proposición 10.–

Si $Y \subset X$ y Y es infinito enumerable, entonces si $X - Y$ es infinito, $X - Y \sim X$.

Sea X infinito, $Y \subset X$, Y infinito enumerable y $X - Y$ infinito. Hay que demostrar que $X - Y \sim X$.

Como $X - Y$ es infinito, $\exists Z \subset X - Y$, Z infinito enumerable. Construímos $(X - Y) - Z$, que puede ser vacío, y tenemos que $X = Y \cup Z \cup ((X - Y) - Z)$. Ahora bien, $Y \cup Z$ es infinito enumerable, porque ambos conjuntos lo son, en consecuencia $Y \cup Z \sim Z$, por transitividad. En consecuencia $X \sim Z \cup ((X-Y) - Z)$. La condición de ser disjuntos está satisfecha en este caso por tratarse de una partición. Pero $Z \cup ((X - Y) - Z) = X - Y$. Por tanto $X \sim X - Y$.

El siguiente esquema resume toda la demostración:

$$X = \left\{\begin{array}{c} Y \\ \cup \\ X - Y \end{array}\right\} = \left.\begin{array}{ccc} \left.\begin{array}{c} Y \\ \cup \\ Z \end{array}\right\} & \sim & Z \\ \cup & & \cup \\ (X-Y)-Z & \sim & (X-Y)-Z \end{array}\right\} = X - Y$$

Proposición 11.–

Si $Y \subset X$, y Y es infinito enumerable y $X \not\sim Y$, entonces $X - Y \sim X$.

Sea $Y \subset X$, Y infinito enumerable y $X \not\sim Y$. Supongamos que $X - Y$ sea finito. Entonves $(X - Y) \cup Y \sim Y$. Porque la unión de un conjunto finito y uno infinito enumerable es infinito enumerable. Es suficiente considerar primero el conjunto finito. El conjunto de los números naturales a partir de cualquier natural dado es infinito enumerable. Pero $(X - Y) \cup Y = X$. En consecuencia $(X - Y) \cup Y \sim X$.Luego, por transitividad, $X \sim Y$. Hemos demostrado que $X - Y$ es finito $\Rightarrow X \sim Y$. Como sabemos que, por hipótesis, $X \not\sim Y$, por modus tollens se puede deducir que $X - Y$ es infinito. Y entonces, por la proposición anterior. $X - Y \sim X$.

Definición 2.– (Innumerabilidad)

Todo conjunto infinito que no sea infinito enumerable se llama **innumerable**.

Proposición 12.–

$\mathcal{P}$(IN) es innumerable

Desde luego es infinito, porque contiene una parte infinita enumerable, a saber, la compuesta por las partes unitarias de IN, de las que hay tantas como naturales. Sólo hay que demostrar, entonces, que no es infinito enumerable.

Supongamos que lo fuese. Entonces $\mathcal{P}(\mathrm{IN}) = \{X_0, X_1, X_2, \ldots\}$ Construímos un conjunto $X \subset \mathrm{IN}$ así: $X = \{n \in \mathrm{IN} : n \notin X_n\}$ Es decir, $0 \in X \Leftrightarrow 0 \notin X_0$, $1 \in X \Leftrightarrow 1 \notin X_1$, etc. . . . $X \neq \phi$, porque $\phi \in \mathcal{P}(\mathrm{IN})$ y en consecuencia le corresponde un índice que por supuesto ϕ no contiene. Por otra parte, $\forall n \in \mathrm{IN} \quad X \neq X_n$ por la forma como se ha construído X, y esto contradice la hipótesis de que hemos enumerado las partes de IN.

Observación:

Si un conjunto X es innumerable y es coordinable con un conjunto Y, Y es innumerable.

Efectivamente, si no son suficientes los naturales para enumerar a X, y Y tiene tantos elementos como Y, tampoco se puede enumerar a Y.

Proposición 13.–

Si un conjunto X es infinito enumerable, $\mathcal{P}(X)$ es innumerable.

En efecto, sea X un conjunto infinito enumerable. Esto implica que $\exists\ f:X \longrightarrow \mathbb{N}$, f biyección. Y esto a su vez implica que f', la extensión de f a las partes de X, también es biyección. Es decir, $\mathcal{P}(X) \xrightarrow{f'} \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Como $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es innumerable, también lo es $\mathcal{P}(X)$.

CAPITULO TERCERO

DOMINACION, CARDINALES Y PRECEDENCIA

Definición 1.– (Dominación)

$X \leq Y \Leftrightarrow \exists\, Y' \subset Y,\ X \sim Y'$

Una definición alterna es:

$X \leq Y \Leftrightarrow \exists f: X \longrightarrow Y$, f inyección.

La dominación estricta:

$X < Y \Leftrightarrow (X \leq Y \wedge X \not\sim Y)$

Proposición 1.–

La dominación es un pre–orden.

La función idéntica garantiza la reflexividad y la composición de biyecciones la transitividad.

Proposición 2.– (Bernstein)

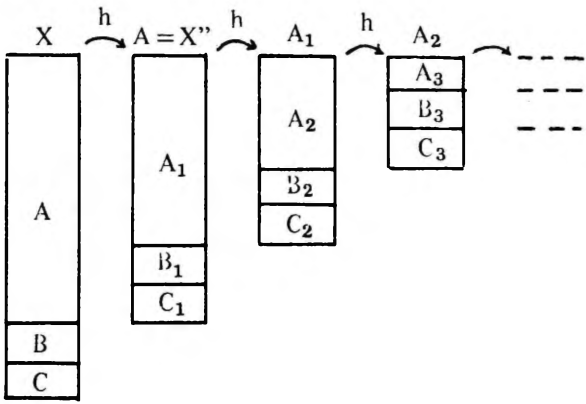
$(X \leqslant Y \wedge Y \leqslant X) \Rightarrow X \sim Y$

Sea, pues, $X \leqslant Y$ y $Y \leqslant X$. Esto significa que $\exists Y' \subset Y$, $X \sim Y'$, $\exists X' \subset X$, $Y \sim X'$. Vamos a demostrar que $X' \sim X$, porque con ese resultado y la transitivitividad obtenemos el teorema que buscamos.

Como Y es coordinable con X', $Y' \subset Y$ es coordinable con una parte X" de X. Luego, por transitividad, $X \sim X''$. Además, tenemos que $X'' \subset X' \subset X$. Ahora se va a demostrar una cosa que parece muy obvia, a saber, que si un conjunto X es coordinable con un parte suya X", entonces también es coordinable con todo X' entre X y X". La prueba puede limitarse a la inclusión estricta, porque en el caso de ser iguales la transitividad de la igualdad termina la prueba.

Llamémosle $A = X''$, $B = X' - X''$ $C = X - X'$. Con esta nueva notación, lo que hay que demostrar es que $A \cup B \sim A \cup B \cup C$.

Consideremos el siguiente diagrama:



En cada caso $A_n = h(A_{n-1})$, donde h es la biyección entre X y X''. Lo mismo B_n y C_n. Además:

$$A = A_1 \cup B_1 \cup C_1$$

$$A_1 = A_2 \cup B_2 \cup C_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$A_n = A_{n+1} \cup B_{n+1} \cup C_{n+1}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

En donde $\forall$ n, A_n, B_n, C_n son disjuntos porque forman una partición de A_{n-1}. Además:

$$A \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim \ldots$$

$$B \sim B_1 \sim B_2 \sim B_3 \sim \ldots$$

$$C \sim C_1 \sim C_2 \sim C_3 \sim \ldots$$

Sea $D_A = \bigcap_{i \in I} A_i$. Como esta intersección es infinita, puede estar vacía.

$$A \cup B \cup C = D_A \cup B \cup C \cup B_1 \cup C_1 \cup B_2 \cup C_2 \cup B_3 \cup C_3 \cup \ldots$$

$$A \cup B = D_A \cup B \cup C_1 \cup B_1 \cup C_2 \cup B_2 \cup C_3 \cup B_3 \cup C_4 \cup \ldots$$

Considerando ambos miembros derechos de las dos ecuaciones de arriba, vemos que son coordinables, porque lo son término a término, ya que $C_n \sim C_{n+1}$, y porque la coordinabilidad es compatible con la unión en el caso, que aquí se cumple, de ser los conjuntos disjuntos. En consecuencia de lo anterior $A \cup B \cup C \sim A \cup B$, y la prueba está terminada.

Proposición 3.–

$X \subset Y \Rightarrow X \leqslant Y$

Es inmediata por la función idéntica.

Proposición 4.– (Cantor)

$X < \mathcal{P}(X)$

La aplicación $f: X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, $\forall x \in X$, $f(x) = \{x\}$ es inyección. Luego $X \leqslant \mathcal{P}(X)$. Sólo queda por demostrar que no son coordinables.

Supongamos que lo fuesen, entonces $\exists\ g: X \xrightarrow[\text{Sobre}]{1-1} \mathcal{P}(X)$. Definimos un conjunto B de los elementos de X que no pertenecen a su imagen: $B = \{x \in X: x \notin g(x)\}$. $B \neq \phi$, porque como $\phi \in \mathcal{P}(X)$ debe existir una $x \in X$ tal que $g(x) = \phi$ y $x \notin \phi$. Como $B \in \mathcal{P}(X)$, $\exists\ b \in X$, $g(b) = B$. Nos preguntamos ahora si b pertenece o no a la imagen con la que está asociada, y resulta lo siguiente. Si b pertenece a su imagen, es decir, $b \in g(b)$, entonces $b \notin B$, por definición de B. Pero como la imagen de b es B, esto significa que $b \notin g(b)$. En resumen, si b pertenece a su imagen, entonces be no pertenece a su imagen, lo que es equivalente a decir que b no pertenece a su imagen.

Supongamos ahora que b no pertenece a su imagen, es decir, $b \notin g(b)$. Entonces $b \in B$, por definición de B. Pero B es la imagen de b, luego $b \in g(b)$. En resumen, si b no pertenece a su imagen, entonces b pertenece a su imagen, lo que equivale a decir que b pertenece a su imagen. Con esto hemos probado que b pertenece y no pertenece a su imagen, lo cual es un absurdo que termina la prueba.

Definición 2.– (Número cardinal)

Se llama **número cardinal**, o **potencia**, o **fuerza** de un conjunto X, a la clase de los conjuntos coordinables con X. Se le denota $\overline{\overline{X}}$.

Definición 3.– (Igualdad para cardinales)

$$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}} \Leftrightarrow X \sim Y.$$

Observación:

Los cardinales finitos pueden presentarse así:

$$0 = \overline{\overline{\phi}}$$

$$1 = \overline{\overline{\{\phi\}}}$$

$$2 = \overline{\overline{\{\phi\ ,\ \{\phi\}\}}}$$

$$3 = \overline{\overline{\{\phi, \{\phi, \{\phi\}\}\}}}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Definición 4.– (Precedencia para cardinales)

$$\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}} \Leftrightarrow X \preceq Y$$

La precedencia estricta:

$$\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{Y}} \Leftrightarrow (\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}} \wedge \overline{\overline{X}} \neq \overline{\overline{Y}})$$

Observación:

Al nivel de lo finito, esta relación coincide con la usual de “menor o igual que”.

Proposición 5.–

La precedencia para cardinales es un orden.

La reflexividad y la transitividad son inmediatas a partir de la definición. La antisimetría se deriva del teorema de Bernstein.

Proposición 6.–

$$X \subset Y \Rightarrow \overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$$

De la proposición 3.

Proposición 7.–

$$\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(X)}}$$

Del teorema de Cantor.

Definición 5.– (Aleph–cero)

$$\aleph_0 = \overline{\overline{\mathrm{IN}}}$$

Aleph–cero, pues es el conjunto de todos los conjuntos infinitos enumerables. Como sabemos que todo conjunto infinito contiene una parte infinita enumerable, $\aleph_0$ precede a cualquier número infinito. De los números infinitos, es el primero.

CAPITULO CUARTO

INFINITUD INNUMERABLE

Proposición 1.–

El conjunto de los reales en el intervalo] 0, 1[es innumerable.

La sucesión 1/2, 1/3, 1/4, . . ., es parte del segmento e infinita enumerable, luego el segmento es infinito. Sólo hay que demostrar que no es enumerable.

Para razonar por absurdo, supongamos que lo sea. Como cada real puede ser expresado en una expansión infinita de decimales de una forma única, (descartando toda sucesión infinita de 9), todos los elementos de] 0, 1[aparecerán enumerados así:

1 $\quad 0.D_{11}D_{12}D_{13}D_{14}D_{15}\ldots$

2 $\quad 0.D_{21}D_{22}D_{23}D_{24}D_{25}\ldots$

$$
\begin{array}{ll}
3 & 0.D_{31}D_{32}D_{33}D_{34}D_{35}\ldots \\
4 & 0.D_{41}D_{42}D_{43}D_{44}D_{45}\ldots \\
5 & 0.D_{51}D_{52}D_{53}D_{54}D_{55}\ldots \\
\vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{array}
$$

En donde cada D es un natural de 0 a 9. Construímos ahora un número real r, $0 < r < 1$, así:

$$r = 0.a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

Tal que $a_i \neq D_{ii}$. En consecuencia r es diferente del primer real en la lista porque difiere de él al menos en su primer decimal. Es diferente del segundo porque difiere de él al menos en su segundo decimal. En general, es diferente del real que aparece en la enésima fila porque difiere de él al menos en el enésimo decimal. Luego r no está en la lista, contradiciéndose la hipótesis de que todos los elementos de $]0, 1[$ están enumerados.

Proposición 2.–

$$]0, 1[\ \sim [0, 1] \sim [a,b] \sim\ ]a,b[\ \sim \mathrm{IR}$$

Sea $A = [0, 1] - \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$
$=]0, 1[- \{1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$

Entonces, $[0, 1] = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\} \cup A$ y $]0, 1[= \{1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots\} \cup A$

Considérese ahora la aplicación $f\colon [0, 1] \longrightarrow]0, 1[$ definida del siguiente modo:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{1}{n+2} \text{ si } x = 1/n, \text{ donde } n \in \mathbb{N} - \{0\} \\ x \text{ si } x \neq 0 \wedge x \neq 1/n, n \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases}$$

Es decir,

$$\begin{array}{cccccccc} \{0, & 1 & 1/2, & 1/3, & 1/4, & \ldots\} \cup & A & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \mathrm{I} \\ \{1/2, & 1/3, & 1/4, & 1/5, & 1/6, & \ldots\} \cup & A & \end{array}$$

Esta función es una biyección. Luego $[0, 1] \sim]0, 1[$. .

Demostramos ahora que $[0, 1] \sim [a, b]$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$.

Para esto considérese la aplicación $f\colon [0, 1] \longrightarrow [a, b]$ definida así:

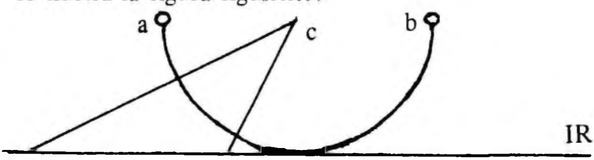
$$f(x) = a + (b - a)x$$

f es obviamente inyectiva. Pero también e suryectiva, porque $\forall y \in [a, b]$, $a \leq y \leq b$, y $\frac{y - a}{b - a} \geqslant 0$. Porque para ser menor qu 0, y tendría que ser menor que a. Por otr parte $\frac{y - a}{b - a} \leq 1$. Porque para ser menor qu 1, y tendría que ser mayor que b. Luego $0 \leq \frac{y - a}{b - a} \leq 1$. Es decir, $\exists\, x = \frac{y - a}{b - a}$, $x \in [0, 1]$. Pero $x = \frac{y - a}{b - a} \Rightarrow y = a + (b - a)\,x$.

En consecuencia, f es biyección.

La misma función sirve para demostrar que $]0, 1[\sim]a, b[$. Efectivamente, sólo se ha prescindido de los dos extremos de ambos conjuntos, que se corresponden.

Se puede ver, geométricamente, que $]a, b[\sim \mathbb{R}$: Forcemos el segmento $]a, b[$ hasta transformarlo en una semi–circunferencia de centro c, y la apoyamos tangencialmente en $\mathbb{R}$, como lo ilustra la figura siguiente:



Las rectas trazadas desde el centro de la semi–circunferencia a la recta real determinan una biyección.

Proposición 3.–

$] 0, 1 [\sim] 0, \infty [$

La biyección $f(x) = x/1-x$ suministra el resultado.

Proposición 4.–

$[0, 1] \sim [0, 1 [\sim] 0, 1]$

Demostramos primero que $[0, 1] \sim [0, 1 [$ mediante la biyección $f: [0, 1] \longrightarrow [0, 1 [$ definida del siguiente modo:

$$f(x) = \begin{cases} 1/n+1 \text{ si } x = 1/n, n \in \mathbb{N} - \{ 0 \} \\ x \text{ si } x \neq 1/n, n \in \mathbb{N} - \{ 0 \} \end{cases}$$

Ahora que $[0, 1 [\sim] 0, 1]$ mediante la biyección $f: [0, 1 [\longrightarrow] 0, 1]$ donde $f(x) = 1 - x$.

Proposición 5.–

$\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),] a, b [\subset X, X \sim \mathbb{R}$

Como $X \sim X$, X es coordinable con una parte de $\mathbb{R}$, y en consecuencia $X \leqslant \mathbb{R}$. Como se ha demostrado que $\mathbb{R} \sim \,]a, b[$, parte de X por hipótesis, se tiene que $\mathbb{R} \leqslant X$. Luego por el teorema de Bernstein, $X \sim \mathbb{R}$

Esta proposición tiene mucho interés, porque la estructura de X puede ser muy compleja.

Proposición 6.–

$[0, 1[^2 \sim [0, 1[$

Sea $X = [0, 1[^2$. Entonces $[0, 1[\cdot \{0\} \subset X$. En consecuencia, en virtud de proposición demostrada, $[0, 1[\cdot \{0\} \leqslant X$. Pero $[0, 1[\cdot \{0\} \sim [0, 1[$· Luego $[0, 1[\leqslant X$. Sólo hay que demostrar ahora que $X \leqslant [0, 1[$, para que el teorema de Bernstein nos dé el resultado que buscamos.

Considérese ahora la aplicación $f: X \longrightarrow [0, 1[$ definida así: $f(x, y) = z$, donde $x = 0.x_1 x_2 x_3 \ldots$, $y = 0.y_1 y_2 y_3 \ldots$, y $z = 0.x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots$ Esta aplicación es inyectiva. Luego $X \leqslant [0, 1[$

Por inducción matemática, esta proposición puede generalizarse para cualquier espacio n–dimensional.

Proposición 7.–

$X \sim Y \Rightarrow X^2 \sim Y^2$

Es una aplicación de la compatibilidad. En efecto, si $X \sim Y$, $\exists\, f{:}X \longrightarrow Y$, biyección. Entonces la aplicación $g{:}X^2 \longrightarrow Y^2$ definida del siguiente modo: $g(x, y) = (f(x), f(y))$, es una biyección.

Definición 1.– (Potencia del continuo)

$c = \overline{\overline{]0, 1[}}$

Proposición 8.–

El conjunto de los números irracionales tiene la potencia del continuo.

Se ha demostrado que $\mathbb{Q}$ es infinito enumerable y que $\mathbb{R}$ tiene la potencia del continuo. Como los irracionales son el conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, no pueden ser finitos, puesto que si lo fueran los reales serían infinito enumerable. En consecuencia esa diferencia es infinita. La proposición 10 del capítulo segundo nos garantiza que $\mathbb{R} - \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$. Igualmente lo hace la proposición 11 del capítulo segundo, puesto que $\mathbb{Q} \nsim \mathbb{R}$. De este modo se descarta la posibilidad de que los irracionales tengan una potencia innumerable entre $\aleph_0$ y c.

Proposición 9.–

El conjunto de los números trascedentales tiene la potencia del continuo.

Como los reales son los algebraicos más los trascedentales, el mismo raciocinio de la proposición anterior es válido en este caso, puesto que se ha demostrado que los algebraicos son infinito enumerable.

Esta proposición es verdaderamente impresionante. Fuera de π y de e, no hay más trascendentales bien conocidos.

Obsérvese también cómo las dos proposiciones anteriores son típicamente de existencia.

Proposición 10.–

Si a un conjunto innumerable se le quita una cantidad finita o infinita enumerable, el resultado sigue siendo un conjunto innumerable.

Es suficiente considerar sólo el peor caso, a saber, cuando se resta una cantidad infinita enumerable de elementos. El resultado tiene que ser infinito innumerable, porque si fuera enumerable también lo sería la unión de la diferencia con el conjunto restado, que es el conjunto original, contradiciéndose la hipótesis de que este es innumerable.

Observación:

Antes demostramos que a un conjunto infinito enumerable se le puede añadir un conjunto finito o infinito enumerable sin que eso cambie el cardinal del conjunto original. Pero no se puede restar un conjunto infinito enumerable de otro que también lo sea y obtener siempre uno infinito enumerable. La proposición anterior nos permite hacer tal resta, siempre y cuando se trate de un conjunto innumerable.

Otra observación pertinente es que la proposición anterior no sustituye las que prueban que los irracionales y los trascendentales tienen la potencia del continuo. La proposición anterior nos dice únicamente que son innumerables.

Proposición 11.–

$2^{\aleph_0} = c$

Considérese la aplicación f: $\mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ definida así: $f(x) = \{ y \in \mathbb{Q} : y < x \}$.

Esta aplicación es inyectiva, porque sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tales que $x_1 \neq x_2$ y donde, por ejemplo, $x_1 < x_2$. Por una propiedad conocida de los reales, sabemos que $\exists\, y \in \mathbb{Q}$, $x_1 < y < x_2$.

Entonces $y \in f(x_2)$ pero $y \notin f(x_1)$. Luego $f(x_1) \neq f(x_2)$. De esta aplicación se deduce que $\mathbb{R} \leq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Como los racionales son infinito enumerable, tenemos que $c \leq 2^{\aleph_0}$

Por otra parte, sabemos que C(IN) el conjunto de las funciones características definidas sobre IN, es coordinable con $\mathcal{P}($ IN $)$, cuya potencia es

$$2^{\overline{\overline{\mathbb{N}}}} = 2^{\aleph_0}$$

Definimos una aplicación $F: C(\mathbb{N}) \longrightarrow [0, 1]$ del siguiente modo: $F(f) = 0.f(1)\, f(2)\, f(3)\ldots$ Esta aplicación es obviamente inyectiva. Luego $C(\mathbb{N}) \leq [0, 1]$, de donde $\overline{\overline{C(\mathbb{N})}} \leq \overline{\overline{[0, 1]}}$. O, lo que es lo mismo, $2^{\aleph_0} \leq c$. Por el resultado anterior y el teorema de Bernstein, concluímos en que $2^{\aleph_0} = c$.

Otra demostración de esta misma proposición es la siguiente: Considérese la aplicación $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0, 1[$ definida así: $f(A) = 0.\, d_1\, d_2\, d_3\, d_4 \ldots$, donde

$$d_n = \begin{cases} 3 \text{ si } n \in A \\ 5 \text{ si } n \notin A \end{cases}$$

Cualquier otro par de números puede servir, siempre y cuando ninguno de los dos sea 9. Porque esta vez descartamos las sucesiones infinitas de 9.

Como f es inyectiva, tenemos que $\mathcal{P}$(IN) $\leq$ [0, 1], y en consecuencia que $2^{\aleph_0} \leq$ c.

Ahora considérese la aplicación g: [0, 1[$\longrightarrow$ $\mathcal{P}$(IN) definida así: $g(x) = \{ n \in IN : d_n = 1 \}$ Tenemos que considerar que x está expresado en su expansión binaria. También la función g es inyectiva . Luego [0, 1[$\leq \mathcal{P}$(IN). De donde c $\leq 2^{\aleph_0}$. Por lo que, en virtud del resultado anterior y del teorema de Bernstein, tenemos que $2^{\aleph_0} = c$.

Proposición 12.–

Sea F = { f: f es una función real definida en]0, 1[} Entonces $IR < F$.

Desde luego]0, 1[$\leq$ F, en virtud de la aplicación g:] 0, 1[$\longrightarrow$ F definida así: g (x) = f:]0,1[$\longrightarrow IR$ donde $\forall$ y $\in$] 0, 1[, f(y) = x. Es decir, g aplica cada real de] 0, 1[en la función constante que tiene como único valor ese real. Y estas funciones constantes son, claro, una parte de F.

Ahora demostramos por absurdo que]0, 1[$\not\sim$ F. Para eso, supongamos lo contrario, a saber, que]0, 1[$\sim$ F. De aquí se sigue que debe existir una aplicación ψ:]0, 1[$\xrightarrow[\text{Sobre}]{1-1}$ F, donde $\psi(x) = f_x$

Construímos ahora una función ϕ definiéndola así:

$$]0,1[\xrightarrow{\phi} \mathbb{R}, \quad \phi(x) = f_x(x) + 1$$

Es decir, dado un $x \in]0, 1[$, buscamos la función f_x que Ψ le hace corresponder. Vemos dónde lanza al propio x y le sumamos 1 para obtener el valor de x por ϕ Luego, $\forall x \in]0, 1[$, $\phi \neq f_x$ porque diferirá de cada una de estas funciones por lo menos en el valor de x. Luego $\phi \notin F$, contradiciéndose la hipótesis.

CAPITULO QUINTO

ARITMETICA CARDINAL

Definición 1.– (Suma para cardinales)

Sea $X \cap Y = \phi$. Entonces

$$\overline{\overline{X}} + \overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{X \cup Y}}$$

La condición de que sean disjuntos puede levantarse definiendo la suma del siguiente modo:

$$\overline{\overline{X}} + \overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{(X \cdot \{0\}) \cup (Y \cdot \{1\})}}$$

Definición 2.– (Producto para cardinales)

$$\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{X \cdot Y}}$$

Observación:

Estas definiciones son independientes del X e Y elegidos en las clases de equivalencia. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} X \sim X' \\ \wedge \\ Y \sim Y' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{\overline{X \cup Y}} = \overline{\overline{X' \cup Y'}} \\ \wedge \\ \overline{\overline{X \cdot Y}} = \overline{\overline{X' \cdot Y'}} \end{array}\right.$$

En efecto, por la compatibilidad:

$$\left.\begin{array}{l} X \sim X' \\ \wedge \\ Y \sim Y' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} X \cup Y \sim X' \cup Y' \\ \wedge \\ X \cdot Y \sim X' \cdot Y' \end{array}\right.$$

Entonces:

$$Z \in \overline{\overline{X \cup Y}} \Rightarrow Z \sim X \cup Y \Rightarrow Z \sim X' \cup Y' \Rightarrow Z \in \overline{\overline{X' \cup Y'}}.$$

Y recíprocamente. También:

$$Z \in \overline{\overline{X \cdot Y}} \Rightarrow Z \sim X \cdot Y \Rightarrow Z \sim X' \cdot Y' \Rightarrow Z \in \overline{\overline{X' \cdot Y'}}.$$

Y recíprocamente.

Proposición 1.–

La suma y el producto para cardinales son leyes conmutativas y asociativas. Además, el producto distribuye con respecto a la suma.

Es decir, utilizando letras griegas para los cardinales:

a) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

b) $\alpha\beta=\beta\alpha$

c) $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$

d) $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$

e) $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$

(a) en virtud de la conmutatividad de la unión. (b) en virtud de la proposición $X\ Y \sim Y\ X$. (c) y (d) en virtud de la asociatividad de la unión y del producto cartesiano respectivamente. Y (e) en virtud de la distributividad del producto cartesiano con respecto a la unión.

Observación:

La suma y el producto para cardinales pueden definirse para un número infinito de sumandos y factores:

$\sum_{i \in I} \alpha_i = \overline{\overline{\bigcup_{i \in I} A_i}}$, donde $(A_i)_{i \in I}$ es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos y donde $\overline{\overline{A_i}} = \alpha_i$

$$\prod_{i \in I} \alpha_i = \overline{\overline{\prod_{i \in I} A_i}}$$

Proposición 2.–

Para cualquier cardinal $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$,

a) $(\alpha \leq \beta \wedge \gamma \leq \lambda) \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \lambda$

b) $(\alpha \leq \beta \wedge \gamma \leq \lambda) \Rightarrow \alpha\,\gamma \leq \beta\,\lambda$

En efecto, sea A, B, G, D, conjuntos tales que $A \cap G = \phi$ y $B \cap D = \phi$. Entonces $f\colon A \cup G \longrightarrow B \cup D$ definida del siguiente modo es una inyección:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } x \in A \\ h(x) \text{ si } x \in G \end{cases}$$

Donde g y h son las inyecciones garantizadas por las premisas.

Igualmente, y sin necesidad de la hipótesis de que sean disjuntos, $f\colon A \cdot G \longrightarrow B \cdot D$, definida así: $f(x,y) = (g(x), h(y))$, es una inyección.

Observación:

De $\alpha < \beta$ y $\gamma \leq \lambda$ no se infiere ni que $\alpha + \gamma < \beta + \lambda$ ni que $\alpha\,\gamma < \beta\,\lambda$. Por ejemplo, si n es un cardinal finito, entonces es verdad que $n < \aleph_0 \wedge c \lneq c$. Y eso no se infiere que $n + c = c < c = \aleph_0 + c$. Ni $nc = c < c = \aleph_0 c$.

Proposición 3.–

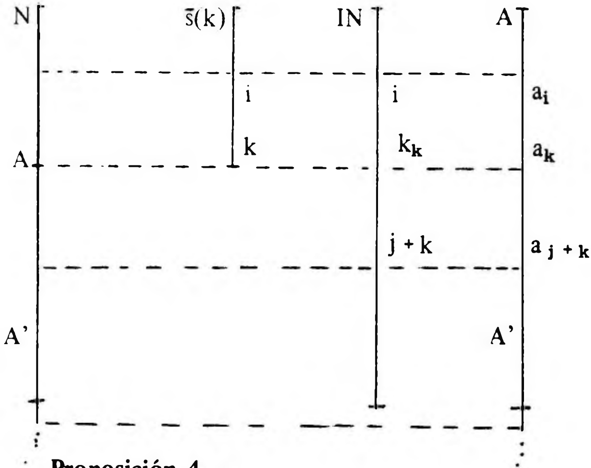
Para cualquier cardinal infinito α y cualquier cardinal finito n,

$$\alpha + n = \alpha$$

Sea A un conjunto infinito con cardinal α, y A' una parte infinita enumerable de A. Además, sea N un conjunto finito, con cardinal n. Podemos suponer que A y N son disjuntos. La proposición quedará demostrada probando que $N \cup A \sim A$.

En efecto, la siguiente aplicación, ilustrada en el diagrama, es una biyección: $f: N \cup A \longrightarrow A$

$$f(x) = \begin{cases} a_i \text{ si } x \in N, \text{ donde } a_i \in A' \\ a_{j+k} \text{ si } x \in A' \\ x \text{ si } x \in A - A' \end{cases}$$



Proposición 4.–

Para cualquier cardinal infinito

$$\alpha + \alpha = \alpha$$

Como $A \cdot \{0\} \sim A$ y $A \cdot \{1\} \sim A$, donde el cardinal de A es α, y como además son disjuntos, sólo hay que demostrar que

$A \cdot \{0\} \cup A \cdot \{1\} \sim A$

Sea $F = \left\{ f : \exists X \subset A, X \cdot \{0\} \cup X \cdot \{1\} \xrightarrow[\text{Sobre}]{1-1} X \right\}$

$F \neq \phi$.

Porque como A es infinito, contiene una parte infinita enumerable que podemos llamar B. Entonces es verdad que $\exists f: B \cdot \{0\} \cup B \cdot \{1\} \xrightarrow[\text{Sobre}]{1-1} B$ por proposición demostrada.

F está ordenado por extensión. Una función es extensión de otra si ésta es restricción de la primera. Además, F satisface las condiciones del lema de Zorn que dice: Todo conjunto ordenado tal que cualquiera parte suya totalmente ordenada está mayorada, tiene maximal. Efectivamente, dada una parte de F totalmente ordenada, la unión del dominio de definición de las funciones determina una función que es extensión de todos los elementos de la cadena. Esto significa que F tiene maximal. Llamémosle g a este elemento maximal y a su rango, que coincide con su conjunto de llegada, A'.

A – A' es finito. Porque si fuera infinito contendría una parte infinita enumerable, que podemos llamar Y, donde $Y \cdot \{0\} \cup Y \cdot \{1\} \sim Y$. Combinando g con la biyección que garantiza esta coordinabilidad, tendríamos una función más extensa que g, contradiciéndose su carácter de maximal.

Ya sabemos que $A' . \{0\} \cup A' . \{1\} \sim A'$ por g. Para terminar, habría que añadirle a A' los elementos que le faltan para convertirlo en A, pero como sabemos también que sólo hay un número finito de ellos, esta adición, en virtud de la proposición anterior, no cambia el cardinal de A'.

Proposición 5.–

Si α y β son cardinales en el que por lo menos uno es infinito, y γ es igual al más fuerte de ambos, entonces:

$$\alpha + \beta = \gamma$$

Como γ es igual al más fuerte, tenemos que $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \gamma$ de donde $\alpha + \beta \leq \gamma + \gamma$, que por la proposición anterior dar: $\alpha + \beta \leq \gamma$. Como por otra parte tenemos que γ es igual a uno de los sumandos, $\gamma \leq \alpha + \beta$. Entonces, por el teorema de Bernstein: $\alpha + \beta = \gamma$.

Proposición 6.–

Para cualquier cardinal infinito α:

$$\alpha \alpha = \alpha$$

Sólo hay que demostrar que $A \cdot A \sim A$, donde A es un conjunto infinito con cardinal α.

Sea F el conjunto de todas las biyecciones entre $X \cdot X$ y X, para algún $X \subset A$. Como A es infinito, contiene una parte infinita enumerable y al menos para esa parte existe una biyección tal. Luego $F \neq \phi$. F está ordenado y satisface las condiciones del lema de Zorn. Luego contiene una biyección maximal g cuyo dominio es $A' \cdot A'$ y cuyo rango es A', donde $A' \subset A$. De aquí se sigue que $\overline{\overline{A'}} \leq \overline{\overline{A}}$. Vamos a demostrar que $\overline{\overline{A'}} < \overline{\overline{A}}$ conduce a una contradicción y que en consecuencia $\overline{\overline{A'}} = \overline{\overline{A}}$ y en consecuencia que $A \cdot A \sim A$.

Supongamos que $\overline{\overline{A'}} < \overline{\overline{A}}$. Luego $A' < A$. De donde $A' \not\sim A$. Entonces, por la proposición 11 del capítulo segundo, $A - A' \sim A$. Como A es infinito, $A - A'$ también lo es y contiene una parte infinita enumerable Y. Se ha demostrado que $Y \cdot Y \sim Y$. Luego, combinando g con la biyección que garantiza esta coordinabilidad, se tiene una función más extensa que g, contradiciéndose el que g es maximal.

Observación:

Las proposiciones 4 y 6 pueden generalizarse. La 4, para cualquier número de sumandos, siempre y cuando este número sea más o tan débil como α. La 6, para un número estrictamente más débil que α.

Proposición 7.–

Si α y β son cardinales en el que por lo menos uno es infinito y γ es igual al más fuerte de ambos, entonces

$$\alpha\beta = \gamma$$

$\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \gamma$ por hipótesis. Luego $\alpha\beta \leq \gamma\gamma$. Como por hipótesis γ es infinito, la proposición anterior nos permite afirmar que $\alpha\beta \leq \gamma$. Por otra parte, $\gamma \leq \alpha \cdot \beta$. Luego, por el teorema de Bernstein, $\alpha\beta = \gamma$

Observación:

Por la proposición anterior y el correspondiente de la suma, se obtiene esta aplicación: Si α y β son cardinales en el que uno de ambos por lo menos es infinito, entonces: $\alpha + \beta = \alpha\beta$

Proposición 8.–

Para cualquier cardinal finito n, $n < \aleph_0$

Desde luego $n \leq \aleph_0$. En efecto, sea N un conjunto finito con n elementos, N es coordinable con $\bar{s}(n-1)$, coordinable a su vez con una parte de $\mathbb{N}$. Luego $N \leq \mathbb{N}$ y por tanto $n \leq \aleph_0$. Sólo hay que demostrar que $n \neq \aleph_0$. Y justamente $N \not\sim$

IN, porque de serlo N sería infinito, contradiciéndose la hipótesis.

Proposición 9.–

Para cualquier cardinal infinito α

$$\aleph_0 \leqslant \alpha$$

Efectivamente, como A, cuyo cardinal es α, es infinito, contiene una parte infinita enumerable, coordinable con IN. Luego $\aleph_0 \leqslant \alpha$

Definición 3.– (Exponenciación para cardinales)

$$\alpha^{\beta} = \overline{\overline{A^{B}}}$$

Donde A^B es el conjunto de aplicaciones de B en A.

Proposición 10.–

a) $\alpha^{\beta}\,\alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}$

b) $\alpha^{\gamma}\beta^{\gamma} = (\alpha\beta)^{\gamma}$

c) $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}$

Para demostrar (a) hay que probar que $A^B \cdot A^G \sim A^{B \cup G}$. Y eso se prueba con la siguiente biyección $\phi : A^B\ A^G \longrightarrow A^{B \cup G}$ tal que ϕ (f,g) = h. Donde h: $B \cup G \longrightarrow A$, definida del siguinte modo:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in B \\ \\ g(x) \text{ si } x \in G \end{cases}$$

Se considera, por supuesto, que B y G son disjuntos.

Para demostrar (b) hay que probar que $A^G \cdot B^G \sim (A \cdot B)^G$. Definimos una biyección $\phi : A^G \cdot B^G \longrightarrow (A \cdot B)^G$, del siguiente modo:
ϕ(f, g) = h. Donde h: $G \longrightarrow A \cdot B$, definida así:

$$h(x) = (f(x), g(x))$$

Por último, para demostrar (c) hay que probar que $(A^B)^G \sim A^{B \cdot G}$. Definimos ϕ: $(A^B)^G \longrightarrow A^{B \cdot G}$, ϕ(f)=g, donde g: $B \cdot G \longrightarrow A$, g(x, y) = F(x), y donde F = f(y).

Observación:

Esta definición de la exponenciación coincide con la multiplicación repetida.

INDICE

APENDICE

En mil seicientos tantos Galileo tropieza, estaba siempre equivócandose, con un descubrimiento qué curioso, qué notable, no se entiende: La mitad de los números naturales son pares, los pares, pues, son una parte, he dicho parte, un pedazo de los naturales. Y sin embargo, qué cosa más ¿qué pasa aquí?, hay tantos pares como naturales. Esto se puede demostrar con todas las grietas se van tapando, es perfecto, no se hunde.

Que la mitad de los números naturales, los enteros positivos, aquellos con que cuento, 1, 2, 3, y todos los demás, que la mitad son pares, esto es perfectamente ¿a quién se le ocurre negarlo?, es así como se piensa, es fácil, entra. Cada uno de por medio es par, partible por dos mitades, eso se llama es par. Ahora bien, empero, en consecuencia, sin embargo, cada natural puede asociarse, asócialo, es fácil, parear, formar pareja, con un número natural de la siguiente forma, con su doble:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n & \ldots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \ldots & 2n & \ldots \end{array}$$

De manera que hay un par para cada natural y un natural para cada par, y en consecuencia hay tantos de unos como de otros.

Esto es muy raro, aquí hay un todo que no es mayor que una de sus partes, y Euclides había dicho, el trato con lo común había dicho, el trato con lo sólido, el vaso de agua, la madera, el montón de dólares, todo había dicho el todo es mayor que cualquiera de sus partes. Nunca te encontrarás en la oficina, ni en el autobús, ni en el bolsillo, nada que contradiga esa gran verdad de cemento y lata de las cosas del mundo, de las cosas reales, cuestan plata, si te dan con ella en la cabeza te lastiman, ay, todas son mayores que cualquiera de sus partes.

Cantor después, murió loco, era alemán, no, era danés, era ruso, da lo mismo, y Dedekind, por fin definen lo infinito, allí está, míralo, cázalo, tírale una red, un sustantivo, un nombre, apunta, justamente mediante aquella propiedad que Galileo encuentra y que no supo, era eso: Es infinito aquello que se puede parear con una de sus partes, que puede embonar con una de sus partes, como si dijésemos es igual a una de sus partes, de su mismo tamaño, es esto. Lo infinito no es más que lo finito, es otra cosa. Es una cualidad, no una cantidad, es algo intenso, no tiene que ser extenso, ni siquiera largo, ni siquiera mucho, ni siquiera.

Esto me interesa enormemente, ya verás por qué lo digo. Aquí hay una definición no cuantitativa de infinito, no necesitas saber contar para tenerlo, y menos mal, contando no llegas al infinito, sumando pena, vida, almacenando dólares, creciendo poco a poco, o mucho a mucho, de paso en paso, así no llegas, no llegas nunca, por allí ni intentes, es aquí, de golpe, en la definición de Cantor, un infinito como una cualidad: está vivo, lo han envuelto, es infinito, rojo, hierve, se acabó. Ahora cuéntalo si quieres, no podrás. Cantor lo pescó por su talón de Aquiles, por donde nos roza la piel, nos envenena la existencia, es el revés, viene a salvarnos, y se nos mete en la refrigeradora. No tiene que ser muy grande, no tiene que ser muy importante, no tiene que durar mucho, menos mal, menos mal, puede caber en el bolsillo, en una semana, en media hora puedes amar infinitamente, y ya después se me olvidó. Te puedes aburrir infinitamente y entonces llega algún amigo, vamos al café, qué risa, cómo me divierto. No importa cuánto dura la eternidad, el infinito tiempo, la rendija, asómate, respira libertad, lo necesario y suficiente es que sea del mismo tamaño que una de sus partes. Por eso puede haber muchos infinitos sin que ninguno quita de allí, yo solamente, desplace a otro, por eso puede haber, podría, un Dios infinitamente bueno, eso no existe, eso no importa, y sin embargo igualmente infinitos males, es muy importante lo que digo, tienes 60 años, en esa bolsa cabe, tienes derecho, búscalo.

Ahora hemos de entender, porque nunca confundirías 3 con 5, hay un criterio cuantitativo, un metro, una medida, dedos, cuenta, pero sí algo 3 con infinito, aquí no tienes dedos, ese criterio fácil, aquí te puedes equivocar, es grave, tú no sabes qué pasó. No importa que hayan sido tres días solamente, a lo mejor fue eterno, es importante que lo entiendas y que me ayudes a entenderlo.

Voy a poner ejemplos. Por ejemplo, Alicia. Alicia, nos vamos a meter en un lío, van a decírselo a tu esposo, a lo mejor no cree ese cuento de que te vas de compras. Amada esta mujer una semana, llevarla hasta su casa, hasta la esquina solamente, hemos de ser discretos, pequeñas atenciones, modesta reina, verla, ¿cómo estás?, si se te ofrece y quieres algo, dime, yo encantado, una semana sólo, y un día sólo de esa semana, un lunes, ahora se lo digo, hoy, alquilamos un cuarto, entonces, por dos horas, tenía dedos en los pies, te rodea, te busca, te pregunta besando, y hubo tanto amor en cada uno de sus besos, parece que lloraba, ¿en qué piensas?, dime, azul, su cuerpo, en cada una de esas horas, tanto amor como hubo en la semana entera. No fue mucho, fue infinito. Ya después no la he visto, tanta cosa, vivir no me interesa, estoy muy ocupado aquí, perdona, el saco, la corbata, tengo que irme, los dos tramos, el silencio. Pero eso fue infinito, una semana eterna, siete días, es matemático, no discutas. Todas las propiedades, lo tiene, es raciocinio, demostrado, y a la vez un golpe de intuición está con ello, no le falta nada, y sin embargo es siete, por eso puedes alcanzarlo, por eso puedes ser eterno.

Como una línea por ejemplo, hay infinitos puntos. Quizás lo equivalente a punto sea instante, no lo sé, después lo pienso. Que se quede el obispo con esa eternidad que después resulta que cómo puede habérsete ocurrido que eso exista. En los papeles de Cantor, con Alicia en la cama, en términos humanos, puedes ir en taxi o caminando, puedes ir en autobús, está la eternidad, qué increíble, la salida al otro lado: Que cualquier cosa que hagas, no es verdad, una sola, que una cosa que hagas sea del mismo tamaño que el todo del que forma parte, una sola, así es eterna, es infinita, de verdad, pregúntale a quien entienda de estas cosas. Que un acto tuyo, ¿mío?, tuyo, tuyo, sea equivalente a tu vida entera, es poca, eso no importa, que en algún acto tuyo esté presente tu nacimiento, tu primer asombro, un gato muerto que un día viste, un árbol, mira, esa fruta no se come, qué rico huele, toda la alegría, es pena, dando brincos infantil del niño que tú fuiste, toda la grave seriedad del hombre maduro, qué eufemismo, quiero decir, Alicia, 33 años ya y no he hecho nada, si no hay nada que hacer, está bien, está bien, que eres o puedas llegar a ser, y toda la angustia, eso es asfixia, la fiebre le ha subido, hay que esperar lo peor, del momento de tu muerte, horror. Así serás eterno. Aunque vivas pocos años. Eso no importa. Lo único que se requiere es tener impreso en alguna parte de la vida un mapa de la vida entera.

ESTE LIBRO SE TERMINO DE
IMPRIMIR EN LOS TALLERES
DE EDITORA RENOVACION, S.A.
PANAMA, 1977

El Dr. José de Jesús Martínez, Sargento de la Guardia Nacional y Profesor en la Universidad Nacional, tiene ya casi veinte años de dictar clases de Filosofía, Lógica y Matemática Moderna.

Es verdad que esta Matemática, que resuelve problemas del Universo, no puede resolver los de la Comunidad. Pero la Comunidad es un rincón íntimo y una de las partes más púdicas del Universo. Allí vive la novia que espera al obrero que extrae el cobre que está en la montaña que hace el alambre que conecta el motor que impulsa al cohete que viaja a los astros. Y en ese cohete viajan de alguna manera sus problemas y sus amores. Y el obrero, de noche, en la montaña, los ve titilando en el Universo. Esperamos, porque esa es la finalidad de la Revolución, que algún día los problemas personales y los de la Comunidad sean también problemas universales, y los del Universo sean también problemas personales y de toda la Comunidad.