

SARGENTO
JOSE DE JESUS
MARTINEZ

MIEMBRO DE LA ESCOLTA DE
SEGURIDAD PERSONAL DEL
GENERAL OMAR TORRIJOS

**INTRODUCCION
A LA TEORIA
DE LA PROBABILIDAD**

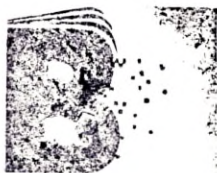
EDICION DEL G 3
GUARDIA NACIONAL

INTRODUCCION
A LA
TEORIA
DE LA
PROBABILIDAD

EDICION
INSTITUTO NACIONAL DE CULTURA
GUARDIA NACIONAL — G-3
DERECHOS RESERVADOS



Matemática - enseñanza



FUNDACION PRO
BIBLIOTECAS
NACIONALES

Tiraje de 2000 ejemplares
Hecho en Panamá por
Impresora de La Nación, Noviembre 1979

SPA
510
M366
1979
c-3

TITN 6979

José de Jesús Martínez

INTRODUCCION
A LA
TEORIA
DE LA
PROBABILIDAD

*Para Lidia, Rogelio,
Pilar y Juan,
mis dos mejores
amigos.*

INDICE

CAPITULO PRIMERO	
Teoría de Conjuntos	9
CAPÍTULO SEGUNDO	
Funciones Aditivas y Medida De Conjuntos	45
CAPITULO TERCERO	
Los Conceptos y las Proposiciones Fundamentales de la Teoría de La Probabilidad	65
CAPITULO CUARTO	
Probabilidad Condicional, de Intersección y de Unión de Eventos	99

CAPITULO PRIMERO

TEORIA DE CONJUNTOS

1.1 Conjunto

La noción de conjunto seguramente es el concepto básico del pensamiento, y la teoría que le trata, el instrumento más poderoso y de mayor filo para abrirse paso, con claridad, elegancia y rigor, a través de toda la matemática, y en particular del cálculo de probabilidades.

Por **conjunto** se entiende una colección de cosas. Estas cosas, que se llaman **elementos** o **membros** del conjunto, pueden ser cosas concretas o abstractas. Así, por ejemplo, una colección de estampillas es un conjunto. Los números naturales igualmente constituyen un conjunto. Etc... Estos dos ejemplos ilustran el carácter finito o infinito que un conjunto puede tener.

Algunas veces se usa la palabra "clase" en vez de la de "conjunto", pero dándole igual significado. Sin embargo es preferible reservar la primera para denotar con ella aquellos conjuntos cuyos elementos son también conjuntos. Por ejemplo, una docena de mangos es un conjunto, pero una docena de docena de mangos es una clase.

Se usarán las letras A, B, C, ..., con y sin subíndice, como **variables** para denotar conjuntos. Cuando se quiera usar cualquiera de estas letras para denotar con ella un conjunto determinado, es decir, cuando se quiera que funcione como **constante**, se lo declarará explícitamente.

Para denotar los elementos de un conjunto se emplearán las letras x, y, z, ..., reservando a, b, c, ..., para constantes de elementos.

Un conjunto se lo determina o explicita poniendo entre llaves los nombres de sus elementos. Así, por ejemplo, el conjunto de los números naturales mayores que 4 pero menores que 10, es $\{ 5, 6, 7, 8, 9 \}$. El conjunto de los resultados posibles de tirar una moneda al aire, es $\{ \text{cara, sello} \}$. El conjunto de los números reales que satisfacen (hacen verdadera) la ecuación $x^2 - 2x - 15 = 0$ es $\{ -3, 5 \}$ (Se le llama el **conjunto solución** de esa ecuación).

Cuando los elementos de un conjunto son muchos o infinitos, y no bastan los puntos suspensivos para declarar cuáles son los elementos, se lo determina indicando la propiedad que en común tienen todos sus elementos. Por ejemplo, el conjunto de los hombres se lo puede determinar, de acuerdo con esta segunda forma, así: $\{ x: x \text{ es hombre} \}$. El conjunto de los números naturales mayores que 5, así: $\{ x: x > 5 \}$. Estas expresiones se las lee, respectivamente, así: El conjunto de las x, tales que x es hombre. El conjunto de las x, tales que x es mayor que 5. Es decir, el signo "x:" debe leerse: Las x, tales que...

Por supuesto, un mismo conjunto puede determinarse de las dos formas que comentamos: tanto por vía de la **extensión**, (primera forma), como por vía de la **comprensión**, (segunda forma). Por ejemplo, el conjunto solución de la ecuación de más arriba, que por vías de la extensión se lo determina así: $\{-3,5\}$, por vía de la comprensión, en cambio, se lo determina del siguiente modo: $\{x:x^2 -2x-15=0\}$

1.2 La Pertenencia

Una relación muy importante es la que tienen los elementos con el conjunto al cual pertenecen. A esa relación se la llama **pertenencia** y se la indica con un signo que recuerda la épsilon griega del verbo *επιμ*, (ser). Para afirmar que un elemento x pertenece a un conjunto A , se escribe:

$$x \in A$$

Que se lee: x pertenece a A , o también: x es elemento de A , o también: x es A .

Para negar la relación de pertenencia, ponemos, como es lo usual, una barra vertical sobre su signo: $x \notin A$, que se lee entonces: x no es elemento de A , Etc...

1.3 La Inclusión.

Otra relación muy importante, pero ésta siempre entre dos conjuntos, es la llamada **inclusión**, indicada con el signo " \subset " que recuerda el de menor o igual que, " \leq ". La expresión $A \subset B$ se la lee: A es subconjunto de B , o también: B es superconjunto de A , o también: los A son B . Se la define, en términos de la pertenencia, del siguiente modo:

$$A \subset B = \text{df Si } x \in A, \text{ entonces } x \in B$$

El signo de la definición " $=\text{df}$ " se lee: Se define por, e indica que la expresión que está a la izquierda (el **definiendum**) es una abreviatura convencional de la que está a la derecha, (el **definiens**). Si convenimos en expresar "Si..., entonces..." mediante el signo lógico " \Rightarrow ", la definición anterior aparece, más compactamente:

$$A \subset B = \text{df } x \in A \Rightarrow x \in B$$

Que se lee: A es subconjunto de B se lo define por (o, es equivalente por definición a) si x (una x cualquiera) es elemento de A , entonces es elemento de B .

Una forma más fácil de explicar la inclusión es diciendo que un **conjunto A es subconjunto de un conjunto B si y sólo si todos los elementos de A lo son también de B .**

Por ejemplo, si A es el conjunto $\{1,2,3\}$ y B , $\{1,2,3,4,5\}$, $A \subset B$. Pero, en este caso particular, $B \not\subset A$.

Es importante tomar nota de la diferencia profunda que hay entre las relaciones de pertenencia y de inclusión, a pesar de que en castellano, y en las otras lenguas nacionales, se expresan ambas con el mismo verbo: ser. La confusión es realmente grave, y fácil, cuando un conjunto es elemento de otro y confundimos esta relación de pertenencia con la inclusión. Por ejemplo, cuando se dice que los apóstoles son doce, queriendo, por supuesto, indicar que el conjunto de los apóstoles es un elemento del conjunto de las cosas que son doce, y no, claro está, que el conjunto de los apóstoles es subconjunto del conjunto de las cosas que son doce. En este segundo caso se estaría diciendo que cada uno de los apóstoles es doce, lo cual es absurdo. Menos fácil, pero tan grave, es tomar como pertenencia la relación de la inclusión. Por ejemplo, cuando se dice que los apóstoles son buenos, queriendo indicar que el conjunto de los apóstoles es subconjunto del conjunto de las cosas buenas, es decir, que cada uno de los apóstoles es bueno, y no el conjunto de ellos, que como conjunto, como ente ideal, abstracto, no es un ser humano ni en consecuencia objeto moralmente considerable.

En resumen, cuando se dice que un conjunto es elemento de otro, no se está diciendo que los elementos del primero lo son también del segundo. Y cuando se dice que un conjunto es subconjunto de otro, no se está diciendo que el primero es elemento del segundo.

Otra advertencia que conviene hacer es la siguiente: Muchos autores denotan la relación de inclusión así:

$$A \subseteq B$$

Reservando la expresión $A \subset B$ para los casos en que todos los elementos de A lo son de B pero no todos los de B lo son de A . Estos autores le llaman a la primera relación **inclusión impropia**, e **inclusión propia** o **estricta** a la segunda. En todo lo que sigue, vamos a usar el signo \subset pero para denotar lo que estos autores llaman inclusión impropia.

De la definición de inclusión se deduce inmediatamente que para cualquier conjunto A

$$A \subset A$$

Es decir, que todo conjunto es subconjunto de sí mismo. Porque $x \in A \Rightarrow x \in A$, que es inmediatamente cierto, por definición, es $A \subset A$.

Cuando una relación es tal que se verifica, dentro del ámbito de las cosas para las cuales ha sido definida, entre cada cosa y ella misma, se la llama **reflexiva**. La inclusión, pues, es una relación reflexiva.

Igualmente se deduce de la definición que

$$A \subset B \text{ y } B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

Es decir, que si un conjunto es subconjunto de otro, y este otro de un tercero, el primero es subconjunto del tercero. Porque si por hipótesis admitimos que $x \in A \Rightarrow x \in B$ y $x \in B \Rightarrow x \in C$, de ahí se deriva que $x \in A \Rightarrow x \in C$, que por definición es $A \subset C$.

A las relaciones que se verifican entre dos cosas cuando se verifican entre la primera y una tercera y entre la tercera y la segunda, se las llama **transitivas**. La inclusión, pues, es una relación transitiva.

Si convenimos en expresar "...y..." con el signo lógico " \wedge ", la propiedad transitiva para la inclusión queda formulada así:

$$(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C$$

Si para cualquier conjunto A y cualquier conjunto B, todas las veces que A fuera subconjunto de B, B fuera subconjunto de A, la relación de inclusión sería simétrica. Pero ése no es el caso. Por el contrario, A es subconjunto de B y B de A sólo cuando A y B son iguales. Expresado simbólicamente:

$$(A \subset B \wedge B \subset A) \Rightarrow A = B$$

A esta propiedad se la llama **antisimetría**. La inclusión es, pues, antisimétrica, porque si todos los elementos de un conjunto lo son también de un segundo conjunto, y todos los de éste lo son también del primero, los dos conjuntos tienen los mismos elementos y son, por definición de igualdad que veremos enseguida, iguales.

1.4 La Igualdad

Otra relación muy importante, también entre conjuntos como la inclusión, y que igualmente que la pertenencia y la inclusión se expresa con el verbo ser, es la llamada **igualdad**. Se la representa con dos barras paralelas:

$$A = B$$

A esta expresión se la lee: A es igual a B, y recibe formal definición, en términos de la ya definida inclusión, del siguiente modo:

$$A = B = \text{df } A \subset B \wedge B \subset A$$

Es decir, dos conjuntos son iguales si, y solamente si, los elementos de cada cual están incluidos en el otro. Y ésto sólo puede pasar cuando tienen exacta-

mente los mismos elementos. En consecuencia, la afirmación $A \neq B$, (A es diferente de B), dice que uno de los dos conjuntos tiene por lo menos un elemento que no lo tiene el otro.

De la definición de igualdad se infiere que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos, independientemente del orden y de las veces en que estos aparezcan. Por ejemplo:

$$\{1,2,3\} = \{3,2,1\} = \{1,1,1,1,3,3,3,2,1,3,3,2,1\}$$

Porque los tres conjuntos tienen exactamente los mismos elementos, a saber, 1, 2, 3.

Se puede demostrar fácilmente que la igualdad es reflexiva, simétrica y transitiva. Dicho simbólicamente, que cualesquiera que sean los conjuntos A, B, C:

$$\begin{array}{ll} A = A & \text{Propiedad reflexiva} \\ A = B \Rightarrow B = A & \text{Propiedad simétrica} \\ (A = B \wedge B = C) \Rightarrow A = C & \text{Propiedad transitiva} \end{array}$$

Que la igualdad es reflexiva, se lo demuestra así:

$$\begin{array}{ll} (1) A \subset A & [\text{Propiedad reflexiva de " } \subset \text{ "}] \\ (2) A \subset A \wedge A \subset A & [(1) \text{ dicho dos veces}] \\ (3) A = A & [\text{Definición de "=" y (2)}] \end{array}$$

La demostración de que la igualdad es simétrica:

$$\begin{array}{ll} (1) A = B & [\text{Hipótesis}] \\ (2) A \subset B \wedge B \subset A & [\text{Definición de "=" y (1)}] \\ (3) B \subset A \wedge A \subset B & [(2) \text{ dicho de otra forma}] \\ (4) B = A & [\text{Definición de "=" y (3)}] \end{array}$$

Por último, la demostración de que es transitiva:

$$\begin{array}{ll} (1) A = B & [\text{Hipótesis}] \\ (2) B = C & [\text{Hipótesis}] \\ (3) A \subset B & [\text{Definición de "=" y (1)}] \\ (4) B \subset A & [\text{ " " " " " }] \\ (5) B \subset C & [\text{ " " " " (2)}] \\ (6) C \subset B & [\text{ " " " " " }] \\ (7) A \subset C & [\text{Propiedad transitiva de} \\ & \text{" } \subset \text{ " y (3), (5)}] \\ (8) C \subset A & [\text{Propiedad transitiva de} \\ & \text{" } \subset \text{ " y (6), (4)}] \\ (9) A = C & [\text{Definición de "=" y (7),(8)}] \end{array}$$

Las relaciones que gozan de las tres propiedades, reflexividad, simetría y transitividad, son muy importantes en la matemática y reciben el nombre de equivalencias. La igualdad es, así, una relación de equivalencia.

1.5 Ejercicios

1. Comente la siguiente falacia:

Los días de la semana son siete.
 Miércoles y jueves son días de la semana.
 Luego, miércoles y jueves son siete.

2. Compárese el siguiente raciocinio con el anterior:

Los hijos de María son buenos.
 Juan y Pedro son hijos de María.
 Luego, Juan y Pedro son buenos.

3. Diga qué relación significa el verbo ser en cada una de las proposiciones siguientes:

- a) Los hombres son racionales.
- b) Los hombres son mortales.
- c) Los hombres son numerosos.

4. Dado el conjunto $A = \{ a, \{ a, b \} \}$, diga si es verdadero o falso que:

- a) $a \in A$
- b) $b \in A$
- c) $\{ a \} \in A$
- d) $\{ a \} \subset A$
- e) $\{ a, b, \} \in A$
- f) $\{ a, b \} \subset A$
- g) $\{ a, a, a, b, b, a \} \in A$
- h) $A \in A$
- i) $A \subset A$

5. Dado el conjunto $A = \{ a, b \}$ y el conjunto $B = \{ a, b, \{ a, b \} \}$ diga si es verdadero o falso que:

- a) $A \in B$
- b) $A \subset B$

6. Dé, como ejemplos, algunas relaciones de equivalencia, fuera de la de igualdad.

7. ¿Por qué no es una relación de equivalencia la de la inclusión?

Estas tres operaciones se las define del siguiente modo:

$$A \cap B = \text{df } \{ x : x \in A \wedge x \in B \}$$

$$A \cup B = \text{df } \{ x : x \in A \vee x \in B \}$$

$$\bar{A} = \text{df } \{ x : x \notin A \}$$

(La definición de la unión contiene el signo "v" que significa "o", pero sin el carácter exclusivo que algunas veces tiene esta expresión en castellano).

Una forma de explicar estas operaciones es la siguiente: La intersección de A con B, $A \cap B$, tiene como resultado un conjunto cuyos elementos lo son de A y de B a la vez. La unión de A con B, $A \cup B$, tiene como resultado un conjunto cuyos elementos lo son de A o de B, o de ambos. Por último, formar el complemento de A, \bar{A} , es la operación que da como resultado un conjunto cuyos elementos son todos aquellos que no lo son de A.

Por ejemplo, supóngase que contamos con el conjunto de los dígitos y que lo llamamos U:

$$U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

Considérense estos tres subconjuntos, A, B, C, de U:

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$B = \{ 4, 5, 6, 7, 8 \}$$

$$C = \{ 0, 8, 9 \}$$

Entonces, en este caso particular, de acuerdo con las definiciones:

$$A \cap B = \{ 4, 5, 6 \}$$

$$B \cap C = \{ 8 \}$$

$$A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$$

$$A \cup C = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 \}$$

$$\bar{A} = \{ 0, 7, 8, 9 \}$$

$$\bar{B} = \{ 0, 1, 2, 3, 9 \}$$

Los siguientes ejemplos, además, ilustran ciertas propiedades que comentaremos después:

$$B \cap A = \{4,5,6\} = A \cap B$$

$$B \cup A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} = A \cup B$$

$$(B \cap A) \cup (B \cap C) = \{4,5,6,8\}$$

$$B \cap (A \cup C) = \{4,5,6,8\} = (B \cap A) \cup (B \cap C)$$

$$A \cap (A \cup B) = \{1,2,3,4,5,6\} = A$$

$$\bar{\bar{A}} = \{1,2,3,4,5,6\} = A$$

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \{0,1,2,3,7,8,9\}$$

$$\overline{A \cap B} = \{0,1,2,3,7,8,9\} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{0,9\}$$

$$\overline{A \cup B} = \{0,9\} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

1.7 Conjunto Vacío y Conjunto Universal

Como queremos que la intersección sea una operación cerrada, en la ilustración de arriba $A \cap C$ también es un conjunto, a pesar de que no contiene ningún elemento, porque no hay ninguno que lo sea de A y de C . A este conjunto sin elementos, cuya existencia hemos de admitir para que la intersección sea cerrada, se le llama **conjunto vacío** o **nulo**, y se lo representa con una letra danesa que recuerda la phi griega (ϕ): ϕ , y que por eso mismo se le llama también "fi".

A los conjuntos que no contienen elementos en común, esto es, aquellos cuya intersección es ϕ , se les llama **disjuntos**. Esta relación es tan importante y frecuente que conviene definirla formalmente:

$$A \text{ y } B \text{ son disjuntos} = \text{df } A \cap B = \phi$$

Además, al conjunto que contiene todos los elementos que se están considerando, y del cual se parte para formar subconjuntos suyos, se le llama **conjunto universal** o **universo** o **espacio**, y se lo representa también con una constante, generalmente la letra U o la E . En el ejemplo de arriba, el universo era el conjunto de los 10 dígitos.

Por la definición de igualdad y las propiedades de ϕ y de U , resulta que estos dos conjuntos especiales son únicos: Para que hubiese dos conjuntos nulos, tendrían que ser diferentes, es decir, uno de ellos tendría que

tener por lo menos un elemento que no lo tenga el otro. Pero ϕ no tiene ningún elemento. Igualmente, para que hubiese dos universos, a uno de ellos tendría que faltarle por lo menos un elemento contenido en el otro. Pero al universo no le puede faltar nada. En consecuencia, sólo hay un conjunto vacío y un conjunto universal.

Que el conjunto universal sea único no quiere decir que no se le pueda cambiar. Efectivamente, en cada problema se postula un universo, que no tiene por qué ser ni siquiera parecido al de otro problema. Pero, una vez postulado, ya no es legítimo cambiarlo o salirse de él considerando alguna cosa que no contiene. En cualquier caso, son las necesidades del momento las que deciden sobre el universo que se va a adoptar. En una ocasión puede ser el conjunto de los números naturales, en otra, el conjunto de resultados posibles de un experimento determinado, en otra, el conjunto de los estudiantes panameños, etc...

Por la definición de inclusión, resulta que ϕ es subconjunto del cualquier conjunto A, y todo conjunto A es subconjunto del universo. Expresado simbólicamente y abreviadamente:

$$\phi \subset A \subset U$$

Introducido ya el conjunto vacío y el universal, con la misma ilustración de la sección anterior, pueden ponerse de manifiesto ciertos teoremas y principios muy importantes de la teoría de conjuntos:

$$\begin{aligned} A \cap \bar{A} &= \{ \} = \phi \\ A \cup \bar{A} &= \{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \} = U \\ A \cap U &= \{ 1,2,3,4,5,6 \} = A \\ A \cup \phi &= \{ 1,2,3,4,5,6 \} = A \\ A \cap \phi &= \{ \} = \phi \\ A \cup U &= \{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \} = U \\ \bar{\phi} &= \{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \} = U \\ \bar{U} &= \{ \} = \phi \end{aligned}$$

Debe repararse en que la noción técnica de conjunto, a diferencia de la popular, no está reñida con la posibilidad de que un conjunto no tenga elementos, o de que los tenga todos, o de que tenga solamente uno. Cuando este último es el caso, se le llama **conjunto unitario**. Por supuesto, "a" no es lo mismo que " $\{ a \}$ ". Lo primero es un elemento, lo segundo, un conjunto (unitario). La diferencia puede hacerse quizá más obvia pensando en la que hay entre el número 2 y el conjunto de los números primos pares.

1.8 Familias de Conjuntos

Sucedirá algunas veces que tendremos que hablar de la intersección o unión de un número finito k de conjuntos con subíndice. En esos casos, en vez de escribir $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$, y $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$, usaremos la notación:

$$\bigcap_{i=1}^k A_i \quad \text{y} \quad \bigcup_{i=1}^k A_i$$

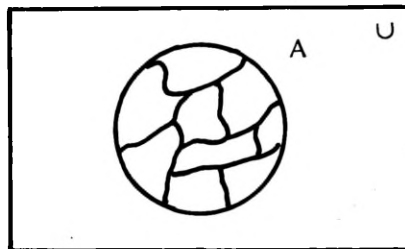
respectivamente. El primero denota el conjunto cuyos elementos son todas aquellas x que lo son de A_i para cualquier i , donde $1 \leq i \leq k$. El segundo denota el conjunto cuyos elementos son todas aquellas x que lo son de A_i para por lo menos un i , donde i tiene el mismo recorrido que en el caso anterior.

1.9 Particiones

Otro concepto que conviene dejar registrado porque aparecerá más adelante, es el de la partición de un conjunto A , que se denota $\alpha(A)$, y que leemos: partición de A .

Una partición de A es una clase (conjunto de conjuntos) cuyos elementos son subconjuntos de A tales que todos ellos son disjuntos dos a dos y la unión de todos ellos es igual a A . Por ejemplo, si $A = \{a, b, c, d, e\}$, una partición de A sería $\alpha(A) = \{\{a\}, \{b, c, d\}, \{e\}\}$. Otra sería $\alpha(A) = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}\}$.

Gráficamente, una partición de A puede ser ésta:



Sobre todo son importantes las particiones del universo. Como $A \cap \bar{A} = \emptyset$ y $A \cup \bar{A} = U$, cualquier conjunto y su complemento constituyen una partición del universo.

1.10 Ejercicios

1. Dé, como ejemplos, algunas operaciones cerradas, fuera de las de intersección, unión y complementación. Algunas no cerrada.

2.- Si $A = \{ 1,2,3 \}$ y $B = \{ 1,a \}$,

a) $A \cup B =$ b) $A \cap B =$

3.- Si $A = \{ a,b \}$ y $B = \{ 1,2,3 \}$

a) $A \cup B =$ b) $A \cap B =$

4. Si $C = \{ 2,b \}$, determínese, para cada uno de los A y los B en los problemas 2 y 3,

a) $(A \cup B) \cap C$ b) $(A \cap B) \cup C$

5. Dado $U = \{ a,b,c,d,e,f,g \}$, y los subconjuntos de U, A, B, C, determinados de la siguiente forma:

$$A = \{ a, g \}$$

$$B = \{ c, d, e, f, g \}$$

$$C = \{ a, b, c, d \}$$

Determine los siguientes conjuntos:

a) $A \cap B =$ g) $\overline{A \cap B} =$ m) $A \cap \phi =$

b) $A \cap C =$ h) $\overline{\overline{A \cap B}} =$ n) $C \cap \phi =$

c) $A \cup B =$ i) $A \cup (A \cap B) =$ o) $B \cup U =$

d) $\overline{B} \cup C =$ j) $A \cap (A \cup B) =$ p) $A \cup \overline{U} =$

e) $\overline{\overline{A}} =$ k) $A \cap (B \cap C) =$ q) $B \cap \overline{B} =$

f) $\overline{\overline{B}} =$ l) $(A \cap B) \cap C =$ r) $B \cup \overline{B} =$

6.- Definida la operación de resta entre conjuntos así:

$$A - B = \text{df } A \cap \overline{B}$$

En general, para un conjunto A y un conjunto B cualquiera, ¿a qué es igual...?

a) $A - A =$

d) $A - \phi =$

b) $U - A =$

e) $\phi - A =$

c) $A - U =$

f) $(A - B) \cap (B - A) =$

Respuestas

1. La suma, la multiplicación, definidas en el conjunto de los números naturales. La resta, pero definida en el conjunto de los números enteros. La división, pero en el conjunto de los racionales. Etc...

2.- a) $\{1, 2, 3, a\}$; b) $\{1\}$

3.- a) $\{1, 2, 3, a, b\}$; b) ϕ

4.- a) $\{2\}$; $\{2, b\}$; b) $\{1, 2, b\}$; $\{2, b\}$

5.- a) $\{g\}$

b) $\{c, d\}$

c) $\{a, c, d, e, f, g\}$

d) $\{a, b, c, d, e, f, g\}$

e) $\{b, c, d, e, f\}$

f) $\{a, b\}$

g) $\{b\}$

h) $\{a, c, d, e, f, g\} = A \cup B$ Este es un caso particular de la llamada ley de De Morgan.

i) $\{a, g\} = A$ Caso particular de una ley llamada de absorción

j) $\{a, g\} = A$ Caso particular de la misma ley anterior.

k) $\phi = (A \cap B) \cap C$ Caso particular de la llamada ley asociativa.

l) $\phi = A \cap (B \cap C)$ Caso particular de la misma ley anterior.

m) ϕ Caso particular de la llamada ley de ϕ

n) ϕ Caso particular de la misma ley anterior.

o) U Caso particular de la llamada ley de U .

p) U Caso particular de la misma ley anterior.

q) ϕ Caso particular de la llamada ley de complemento.

r) U Caso particular de la misma ley anterior.

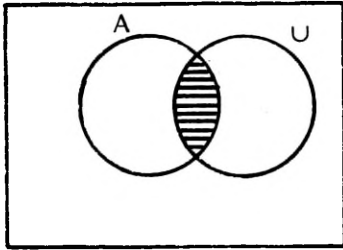
6.- a) ϕ d) A

b) \bar{A} e) ϕ

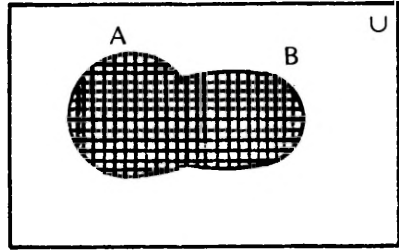
c) ϕ f) ϕ

1.11 Los Diagramas de Venn

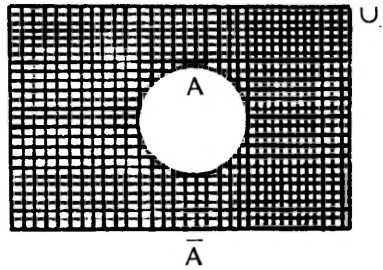
La teoría de conjuntos tiene la enorme ventaja de que se deja interpretar geoméricamente, haciéndose así muy plástica e intuitiva. En esta interpretación los conjuntos son figuras cerradas, generalmente círculos, dentro de una mayor, generalmente rectangular, que las incluye a todas y que es el universo. Los elementos que se consideran son los puntos del plano rectangular. Las operaciones, entonces, aparecen así:



$A \cap B$

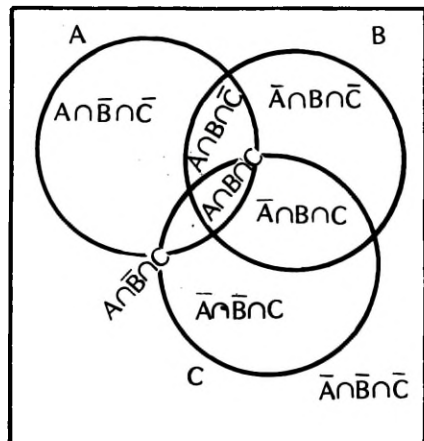
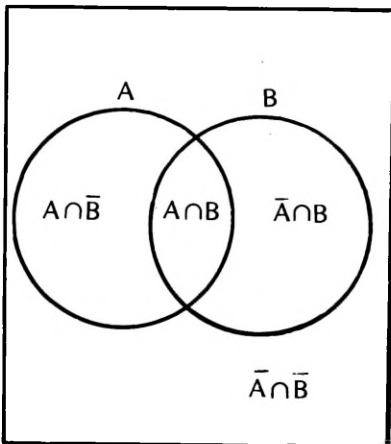


$A \cup B$



\bar{A}

Las dos siguientes figuras ilustran las diferentes regiones que pueden formarse con 2 y 3 conjuntos respectivamente. Para más de 3 conjuntos, los diagramas de Venn pierden su eficacia intuitiva.



1.12 Algunas Propiedades Importantes en la Teoría de Conjuntos.

Propiedad conmutativa para la intersección y la unión:

$$\begin{aligned}A \cap B &= B \cap A \\A \cup B &= B \cup A\end{aligned}$$

Esta propiedad, bien intuitiva, de la intersección y la unión, permiten alterar el orden de los operandos sin cambiar de resultado.

Existencia de elemento de identidad para la intersección y la unión:

$$\begin{aligned}A \cap U &= A \\A \cup \phi &= A\end{aligned}$$

Esto quiere decir que la intersección del universo con cualquier conjunto da ese conjunto, y que la unión del conjunto vacío con cualquier conjunto es igual a este. Es decir, que U y ϕ son elementos de identidad con respecto a la intersección y la unión respectivamente, como lo son el 1 y el 0 con respecto a la multiplicación y a la suma.

Existencia de complemento:

$$\begin{aligned}A \cap \bar{A} &= \phi \\A \cup \bar{A} &= U\end{aligned}$$

Dado un conjunto cualquiera, se puede formar su complemento, es decir, el conjunto con el cual, mediante la intersección y la unión, da respectivamente el conjunto vacío y el universal.

Propiedad distributiva de la intersección con respecto a la unión, y de la unión con respecto a la intersección:

$$\begin{aligned}A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C)\end{aligned}$$

Estos cuatro pares de igualdades son muy importantes y conviene recordarlas juntas. Otras que conviene citar son:

Propiedad asociativa para la intersección y la unión:

$$\begin{aligned}A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \\A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C\end{aligned}$$

En razón de estas dos igualdades podemos escribir $A \cap B \cap C$, y $A \cup B \cup C$, ahorrándonos los paréntesis.

Propiedad de idempotencia para la intersección y la unión:

$$\begin{aligned}A \cap A &= A \\A \cup A &= A\end{aligned}$$

Leyes de absorción:

$$\begin{aligned}A \cap (A \cup B) &= A \\A \cup (A \cap B) &= A\end{aligned}$$

Leyes de De Morgan:

$$\begin{aligned}\overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B}\end{aligned}$$

Leyes de ϕ y de U:

$$\begin{aligned}A \cap \phi &= \phi \\A \cup U &= U\end{aligned}$$

Ley de involución:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Complemento de ϕ y de U:

$$\begin{aligned}\overline{\phi} &= U \\ \overline{U} &= \phi\end{aligned}$$

Las siguientes son las propiedades más importantes de la inclusión:

$$\begin{aligned}A &\subset A \\(A \subset B \wedge B \subset A) &\Rightarrow A = B \\(A \subset B \wedge B \subset C) &\Rightarrow A \subset C\end{aligned}$$

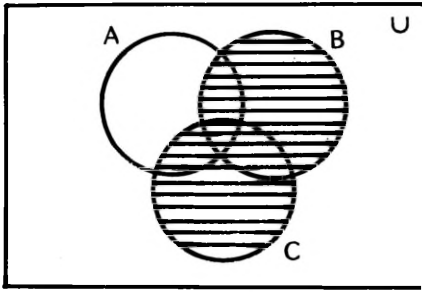
Son las propiedades, comentadas ya anteriormente, de reflexividad, antisimetría y transitividad.

$$\phi \subset A \subset U$$

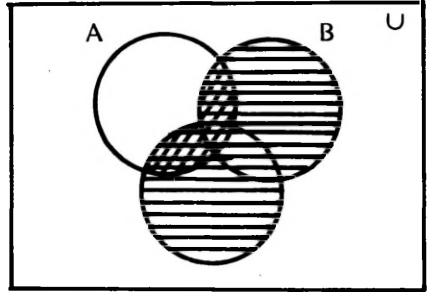
El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto, y todo conjunto es subconjunto del conjunto universal.

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B$$

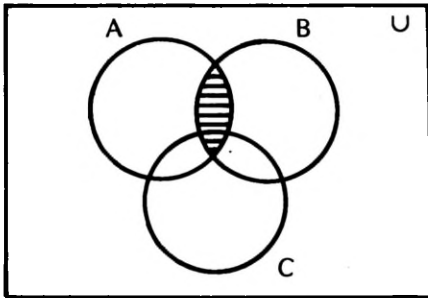
Todas estas propiedades pueden ser ilustradas mediante los diagramas de Venn. Por ejemplo, la propiedad distributiva de la intersección con respecto a la unión::



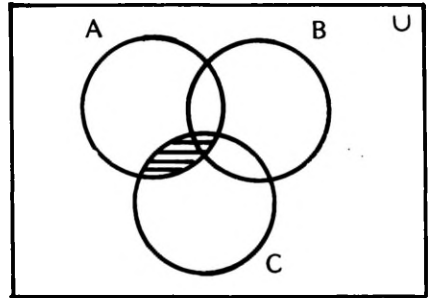
$$B \cup C$$



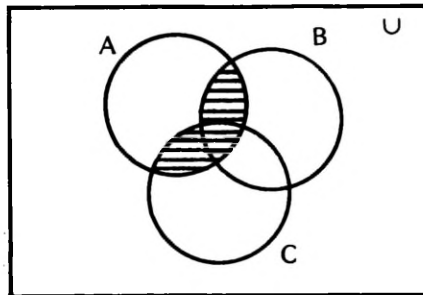
$$A \cap (B \cup C) \text{ (La región doblemente rayada)}$$



$$A \cap B$$



$$A \cap C$$



$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$

1.13 La Demostración en la Teoría de Conjuntos

El método de los diagramas de Venn, sin embargo, no constituye una demostración, pues se apoya en figuras particulares. Para que lo fuera, tendrían que hacerse todas las figuras posibles, de las que hay un número infinito.

El método de demostración propio de la teoría de conjuntos se basa en la pertenencia, que se considera un término primitivo, es decir, no definido, en la noción de conjunto, igualmente primitiva, y en las definiciones. La propiedad distributiva de la intersección con respecto a la unión, ilustrada en la sección anterior con el método de Venn, se la demuestra como aparece un poco más abajo. Antes, sin embargo, conviene introducir un nuevo signo lógico que economiza mucho trabajo.

Es perfectamente intuitivo que dos expresiones equivalentes por definición, cuando son proposiciones, se implican mutuamente. (Si las expresiones son conjuntos —o números—, entonces la equivalencia por definición implica la igualdad). Es decir, que si $p =_{df} q$, donde p y q son proposiciones, entonces $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$, o, lo que es igual: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Esta última expresión la vamos a abreviar así:

$$p \Leftrightarrow q$$

Que se lee: p es equivalente a q , o también: si p , q , y si q , p , o, todavía mejor: p si y sólo si q .

Este signo, llamado de equivalencia, goza, como lo sugiere su nombre, de las tres propiedades de las relaciones de equivalencia:

$$\begin{aligned} p &\Leftrightarrow p \\ (p \Leftrightarrow q) &\Rightarrow (q \Leftrightarrow p) \\ [(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] &\Rightarrow (p \Leftrightarrow r) \end{aligned}$$

Con este nuevo signo a la mano, la demostración aparece así:

- (1) $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B \cup C)$ [Def. de \cap]
- (2) $(x \in A \wedge x \in B \cup C) \Leftrightarrow [x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)]$ [Def. de \cup]
- (3) $[x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)] \Leftrightarrow [(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)]$ [Dist. de \wedge con respecto a \vee]
- (4) $[(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)] \Leftrightarrow (x \in A \cap B \vee x \in A \cap C)$ [Def. de \cap]
- (5) $(x \in A \cap B \vee x \in A \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ [Def. de \cup]

- (6) $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ [Transitividad de \Leftrightarrow y 1-5]
- (7) $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C) \wedge (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ [Def. de \subset y (6)]
- (8) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ [Def. de $=$ y (7)]

Estas demostraciones pueden ser abreviadas si las llevamos a cabo linealmente y sin declarar explícitamente las leyes o definiciones que se usan. La demostración anterior, linealmente, aparece así:

$$\{x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B \cup C) \Leftrightarrow [x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)] \Leftrightarrow [(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)] \Leftrightarrow (x \in A \cap B \vee x \in A \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)\} \Rightarrow A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

1.14 El Método Tabular

Otro método de demostración, más rápido pero menos elegante, es el de la tabla:

Se conviene en que

$$\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ \in \end{array}$$

significa que un elemento x cualquiera pertenece a A , y

$$\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ \notin \end{array}$$

significa que un x cualquiera no es elemento de A . Con esta convención, las condiciones en las que un x cualquiera pertenece o no al resultado de las operaciones intersección, unión y complementación, pueden ponerse de manifiesto tabularmente:

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$
\in	\in	\in	\in
\in	\notin	\notin	\in
\notin	\in	\notin	\in
\notin	\notin	\notin	\notin

A	\bar{A}
\in	\notin
\notin	\in

Apoyándose en estas tablas, es muy fácil hacer la de cualquier expresión, por muy compleja que sea. Basta poner, primero, en las columnas de todas las variables que intervienen, los diferentes casos posibles de que una x cualquiera sea o no elemento del conjunto bajo el cual está. A continuación, y en el puesto correspondiente a cada una de las operaciones previamente desglosadas, la afirmación de que en ese caso la x es o no es elemento de su resultado. Por ejemplo, la tabla que demuestra la propiedad distributiva de la intersección con respecto a la unión:

A	C	B	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
∈	∈	∈	∈	∈	∈	∈	∈
∈	∈	∉	∈	∈	∈	∉	∈
∈	∉	∈	∈	∈	∉	∈	∈
∈	∉	∉	∉	∉	∉	∉	∉
∉	∈	∈	∈	∉	∉	∉	∉
∉	∈	∉	∈	∉	∉	∉	∉
∉	∉	∈	∈	∉	∉	∉	∉
∉	∉	∉	∉	∉	∉	∉	∉

La tabla nos dice que toda vez que un elemento x cualquiera pertenece a $A \cap (B \cup C)$, también pertenece a $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, y viceversa. Esto es, que la primera expresión es subconjunto de la segunda y la segunda de la primera, y en consecuencia ambas iguales.

1.15 El Método Algebraico, (Algebra Booleana)

Aún otra forma de demostrar los teoremas de la teoría de conjuntos, es postulando como axiomas los primeros cuatro pares de propiedades: conmutación, identidad, complemento y distribución, y derivando lógicamente todas las demás de ese sistema de axiomas. A este sistema, o cualquier otro equivalente a él, se le llama **álgebra booleana** en honor a su descubridor George Boole, lógico matemático inglés del siglo pasado.

Como los axiomas vienen en pares, en donde el uno es idéntico al otro salvo por la diferencia de que tienen los signos intercambiados, (\cap, \cup, U, ϕ , con \cup, \cap, ϕ, U), para cada teorema deducible a partir de cierto axioma o axiomas, hay otro teorema deducible del axioma parejo del primero. Este teorema, idéntico al primero pero con los signos intercambiados, se llama **su dual** y tiene una demostración rigurosamente paralela al otro.

Como ilustración, véase la demostración del teorema de idempotencia para la unión: $A \cup A = A$

- | | |
|--|----------------------|
| (1) $A \cup \phi = A$ | [Identidad] |
| (2) $A \cap \bar{A} = \phi$ | [Complemento] |
| (3) $A \cup (A \cap \bar{A}) = A$ | [(1), (2)] |
| (4) $(A \cup A) \cap (A \cup \bar{A}) = A$ | [Distribución (3)] |
| (5) $(A \cup A) \cap U = A$ | [Complemento, (4)] |
| (6) $A \cup A = A$ | [Identidad, (5)] |

La demostración de su dual: $A \cap A = A$, idempotencia para la intersección, es la siguiente:

- | | |
|--|-----------------------|
| (1) $A \cap U = A$ | [Identidad] |
| (2) $A \cup \bar{A} = U$ | [Complemento] |
| (3) $A \cap (A \cup \bar{A}) = A$ | [(1), (2)] |
| (4) $(A \cap A) \cup (A \cap \bar{A}) = A$ | [Distribución, (3)] |
| (5) $(A \cap A) \cup \phi = A$ | [Complemento (4)] |
| (6) $A \cap A = A$ | [Identidad, (5)] |

Por supuesto, no se habría podido ilustrar con la propiedad distributiva porque en este sistema es un axioma.

La inclusión se la puede introducir en el sistema con la definición siguiente:

$$A \subset B \text{ =df } A \wedge \bar{B} = \phi$$

A partir de esta definición se pueden demostrar las propiedades ya comentadas de la inclusión, al igual que las siguientes:

$$\begin{aligned} A \cap B = A &\Leftrightarrow A \subset B \\ A \cup B = B &\Leftrightarrow A \subset B \\ \bar{A} \cup B = U &\Leftrightarrow A \subset B \\ A \subset B &\Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A} \end{aligned}$$

Sin duda se habrá reparado en que el álgebra booleana no hace ninguna referencia a la pertenencia, ni a ninguna otra cosa que lo constriña a ser un sistema necesariamente interpretable sólo para una teoría de conjuntos. Vamos a ver más abajo cómo esta particularidad suya determina su carácter más notable.

1.16 Ejercicios

1. En un ejercicio anterior se definió la resta o diferencia del siguiente modo:

$$A - B = \text{df } A \cap \bar{B}$$

Ahora definimos la operación llamada **diferencia simétrica** así:

$$A \Delta B = \text{df } (A - B) \cup (B - A)$$

- a. Muéstrase, mediante los diagramas de Venn, que la diferencia simétrica goza de la propiedad asociativa. Es decir, que $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

Demuéstrase algebraicamente, apoyándose en la definición de arriba, que

- b) $A \Delta \phi = A$
- c) $A \Delta A = \phi$

2. Ilústrese, mediante los diagramas de Venn,

- a.) Los dos teoremas de De Morgan.
- b.) La propiedad distributiva de la unión con respecto a la intersección.

3) Demuéstrase conjuntísticamente que

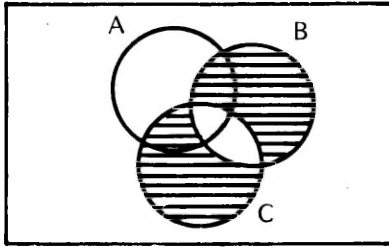
- a) $A \cap B \subset A$
- b) $A \subset A \cup B$

4. Demuéstrase: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

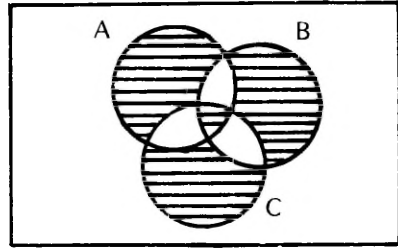
- a) Conjuntísticamente, es decir, apoyándose en la relación de pertenencia y las definiciones de la teoría de conjuntos.
- b) Mediante el método tabular.
- c) Algebraicamente.

Respuestas.—

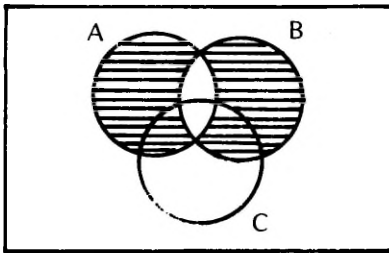
1.— a)



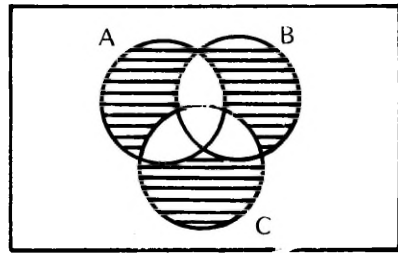
$$B \setminus A \cup C \setminus A$$



$$A \Delta (B \Delta C)$$



$$A \Delta B$$



$$(A \Delta B) \Delta C$$

b)

- (1) $A \Delta \phi = (A - \phi) \cup (\phi - A)$ [Def. de Δ]
- (2) $= (A \cap \bar{\phi}) \cup (\phi \cap \bar{A})$ [Def. de $-$]
- (3) $= (A \cap U) \cup \phi$ [Complemento y ley de ϕ]
- (4) $= A \cup \phi$ [Identidad]
- (5) $= A$ [Identidad]

c)

- (1) $A \Delta A = (A - A) \cup (A - A)$ [Def. de Δ]
- (2) $= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{A})$ [Def. de $-$]
- (3) $= \phi \cup \phi$ [Complemento]
- (4) $= \phi$ [Identidad o Idempotencia]

Una estructura algebraica muy rica es la que se llama **grupo**. Dado un conjunto G de elementos x, y, z, \dots , y una operación "o" que satisfaga estos tres axiomas:

$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$	Asociatividad
$x \circ e = x$	Existencia de elemento de identidad
$x \circ x^{-1} = e$	Existencia de inverso.

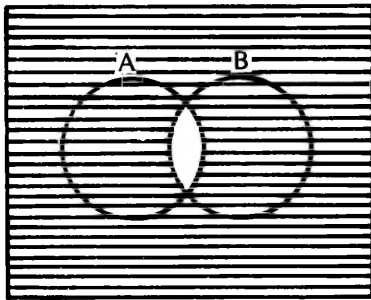
Se dice que (G, \circ) forma un grupo. El ejercicio que comentamos demuestra que los conjuntos forman un grupo con la operación diferencia simétrica, donde \emptyset es el elemento de identidad y cada conjunto su propio inverso.

Si además se satisface un cuarto axioma:

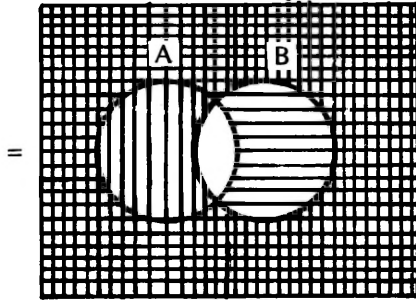
$$x \circ y = y \circ x \quad \text{Conmutación}$$

Se dice que el grupo es conmutativo o abeliano. El grupo formado por los conjuntos y la operación Δ es un grupo abeliano. Otros grupos, igualmente abelianos, son el conjunto de los números enteros y la operación de suma; el conjunto de los racionales, menos el 0, y la operación de multiplicación. Etc...

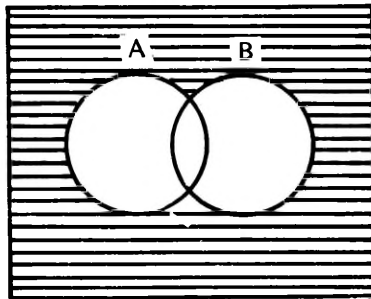
2.- a)



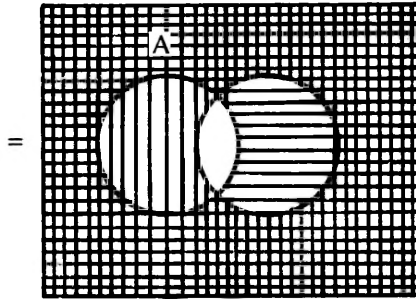
$\overline{A \cap B}$



$\overline{A \cup B}$

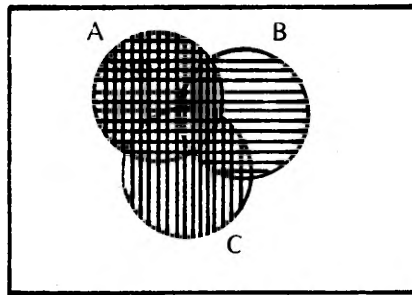
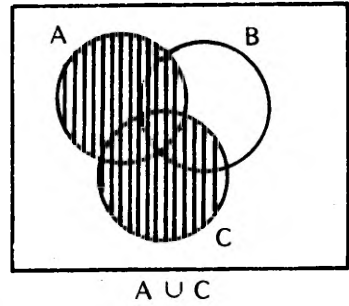
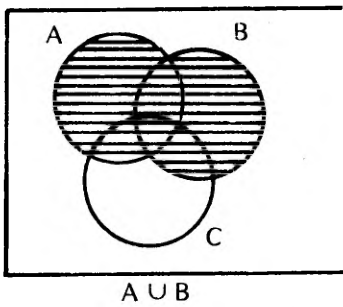
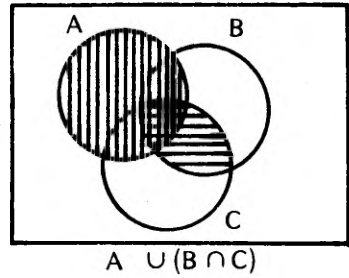
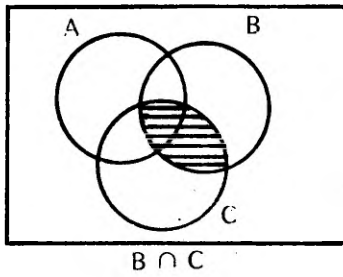


$\overline{A \cup B}$



$A \cap B$ (La Región Rayada Doblemente)

b)



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$ (La región rayada Dblemente)

3.- a.)

$$[x \in A \cap B \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \Rightarrow x \in A] \Rightarrow \\ \Rightarrow A \cap B \subset A$$

b)

$$[x \in A \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in A \cup B] \Rightarrow \\ \Rightarrow A \subset A \cup B$$

4.- a) (1) $x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B$ [Def. de -]

(2) $x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B)$ [Def. de \cap]

(3) $(x \notin A \vee x \notin B) \Leftrightarrow (x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B})$ [Def. de -]

(4) $(x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}) \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ [Def. de \cup]

(5) $x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ [Transitividad de \Leftrightarrow y 1-4]

(6) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B} \wedge \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ [Def. de \subset]

(7) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ [Def. de =]

b)

A	B	$A \cap B$	$A \cap B$	\overline{A}	\overline{B}	$\overline{A} \cup \overline{B}$
\in	\in	\in	\notin	\notin	\notin	\notin
\in	\notin	\notin	\in	\notin	\in	\in
\notin	\in	\notin	\in	\in	\notin	\in
\notin	\notin	\notin	\in	\in	\in	\in

c) (1) $\phi \cup \phi = \phi$ [identidad]

(2) $(B \cap \phi) \cup (A \cap \phi) = \phi$ [Ley de ϕ]

(3) $[B \cap (A \cap \overline{A})] \cup [A \cap (B \cap \overline{B})] = \phi$ [Complemento]

(4) $[(A \cap B) \cap \overline{A}] \cup [(A \cap B) \cap \overline{B}] = \phi$ [Asociación y conmutación]

(5) $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \phi$ [Distribución]

(6) $U \cap U = U$ [Identidad]

(7) $(U \cup \overline{B}) \cap (U \cup \overline{A}) = U$ [Ley de \cup]

(8) $[(A \cup \overline{A}) \cup \overline{B}] \cap [(B \cup \overline{B}) \cup \overline{A}] = U$ [Complemento]

(9) $[(\overline{A} \cup \overline{B}) \cup A] \cap [(\overline{A} \cup \overline{B}) \cup B] = U$ [Asociación y conmutación]

(10) $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (A \cap B) = U$ [Distribución]

(11) $\overline{A} \cup \overline{B}$ es igual al complemento de $A \cap B$ [Complemento, (5) (10)]

$$(12) A \cup B = A \cap B$$

[El complemento
 $A \cap B$ es $A \cap B$]

1.17 El Álgebra Proposicional

Precisamente porque el álgebra booleana no se apoya en lo más mínimo en la pertenencia, (tal relación ni siquiera aparece en él), es susceptible de recibir otras interpretaciones, las más conocidas de las cuales son el álgebra de circuitos y el de proposiciones. En esta sección comentamos superficialmente el álgebra proposicional porque es un tema que incide sobre toda la matemática, y sobre el cálculo de probabilidades de una doble manera.

El cálculo lógico de proposiciones, como modelo del álgebra booleana, surge al quitarle a éste el significado con el que lo presentamos, sustituyéndolo por el siguiente:

Las variables A, B, C, \dots , no son ya conjuntos sino proposiciones, donde por proposición se entiende cualquier cosa que sea verdadera o falsa. Las constantes U y ϕ denotan una proposición verdadera y falsa respectivamente.

La operación $A \cap B$ es la de formar una proposición, sobre la base de la proposición A y la proposición B , que es verdadera únicamente cuando A y B son verdaderas.

La operación $A \cup B$ es la de formar una proposición que es falsa únicamente cuando A y B son ambas falsas; es decir, que es verdadera cuando por lo menos una de las dos es verdadera.

La operación \bar{A} es la de formar una proposición que es verdadera únicamente cuando A es falsa, y en consecuencia, falsa cuando A es verdadera.

Para establecer un puente de contacto entre estas proposiciones y las del lenguaje corriente, traducimos $A \cap B$ como A y B , $A \cup B$ como A o B o ambos, \bar{A} como no $-A$, y las llamamos **conjunción**, **disyunción** y **negación**, respectivamente, porque, en efecto, estas formas de expresión castellanas están sujetas, más o menos, a las mismas determinaciones lógicas de los operadores booleanos.

El lenguaje corriente es demasiado rico en emoción y sugerencia para que pueda tener la precisión e inequívocidad que la ciencia, y muy particularmente la matemática, necesita. Por esto, ya es práctica universalmente aceptada, emplear el significado y aun la notación del álgebra booleana de proposiciones.

Aun faltan, sin embargo, dos signos, $A \subset B$ y $A = B$, que es preciso reinterpretar para transformar el álgebra booleana de conjuntos en un álgebra lógico de proposiciones.

La relación $A \subset B$, definida como una abreviatura de $A \cap \bar{B} = \phi$, la tenemos que interpretar como: "La proposición A y no -B es falsa", que es realmente, aunque no con mucha evidencia, otra forma de decir: "La proposición no-A o B es verdad", que también puede expresarse: "Si A es verdad, entonces B es verdad". Por esto último, a la proposición $A \subset B$ la vamos a llamar **condición o implicación**. La primera proposición, A, es el **anteecedente**, y la segunda, B, el **consecuente**

Por último, la relación de equivalencia $A = B$, definida como una abreviatura de $A \subset B \wedge B \subset A$, tenemos que interpretarla como: "Si A entonces B, y si B entonces A". La llamamos **bicondicional o mútua implicación**, o, más sencillamente, **equivalencia**, y puede leerse: "A si y sólo si B", o también, claro: "A y B son equivalentes".

Con el propósito de manifestar explícitamente que hemos cambiado de interpretación, y para poder usar las dos interpretaciones a la vez, cambiamos igualmente de notación:

Algebra de Conjuntos.	Algebra de Proposiciones.		
		Se llama:	Se lee:
A, B, C, . . .	p, q, r, . . .	Variables proposicionales.	p, q, r, . . .
ϕ	F	Valor veritativo falso.	Proposición falsa.
U	V	Valor veritativo verdad.	Proposición verdadera.
$A \cap B$	$p \wedge q$	Conjunción.	p y q
$A \cup B$	$p \vee q$	Disyunción.	p o q
\bar{A}	$\sim p$	Negación.	No-p
$A \subset B$	$p \Rightarrow q$	Implicación.	Si p, q
$A = B$	$p \Leftrightarrow q$	Equivalencia.	p si y sólo si q

Está claro, sin embargo, que las dos teorías, la de conjuntos y la de proposiciones, tienen una misma estructura (booleana). Son dos ropajes diferentes pero de un mismo esqueleto. Con esta nueva forma, los axiomas, cabalmente satisfechos, aparecen así:

$$\begin{aligned} (p \wedge q) &\Leftrightarrow (q \wedge p) \\ (p \vee q) &\Leftrightarrow (q \vee p) \end{aligned}$$

Conmutación.

$$\begin{aligned} (p \wedge V) &\Leftrightarrow p \\ (p \vee F) &\Leftrightarrow p && \text{Identidad.} \\ (p \wedge \sim p) &\Leftrightarrow F \\ (p \vee \sim p) &\Leftrightarrow V && \text{Complemento.} \\ [p \wedge (q \vee r)] &\Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \\ [p \vee (q \wedge r)] &\Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)] && \text{Distribución.} \end{aligned}$$

Con esto queda regulada la notación que hemos ido introduciendo informalmente a lo largo de este capítulo.

Por supuesto, a cada teorema del álgebra de conjuntos corresponde uno del álgebra de proposiciones, y al revés, puesto que hay una correspondencia de signo a signo y de axioma a axioma entre los dos sistemas. Dicho técnicamente, los dos sistemas son **isomórficos** (tienen la misma forma) con respecto al álgebra booleana.

Algunos de los teoremas del álgebra lógico de proposiciones, ya citados en su interpretación de conjuntos, son:

$$\begin{aligned} [p \wedge (q \wedge r)] &\Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r] && \text{Asociación.} \\ [p \vee (q \vee r)] &\Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r] \\ (p \wedge p) &\Leftrightarrow p \\ (p \vee p) &\Leftrightarrow p && \text{Idempotencia.} \\ \sim (p \wedge q) &\Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \\ \sim (p \vee q) &\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) && \text{De Morgan.} \\ \sim (\sim p) &\Leftrightarrow p && \text{Involución.} \end{aligned}$$

Dos teoremas sobre los cuales se va a fundamentar la sección siguiente, son:

$$\begin{aligned} [(p \wedge q) \Rightarrow r] &\Leftrightarrow [(p \Rightarrow (q \Rightarrow r))] && \text{Exportación.} \\ [(p \wedge \sim q) \Rightarrow q] &\Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow q) && \text{Reducción al absurdo.} \end{aligned}$$

De acuerdo con la interpretación dada, las siguientes tablas, paralelas a las de la página 27, son obvias:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

p	$\sim p$
V	F
F	V

Un detalle importante es el hecho de que en esta interpretación las relaciones $p \Rightarrow q$ y $p \Leftrightarrow q$ son operaciones cerradas, cosa que no sucedía en la interpretación de conjuntos, porque $A \subset B$ y $A = B$ no son conjuntos, como A y B, sino proposiciones.

Para conocer la tabla o matriz de valores veritativos de estas dos operaciones, no hay más que hacer las de aquellas expresiones que las definen. Para la implicación:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q)$ es falsa.
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Luego:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Para la equivalencia, definida como $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

En consecuencia:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La tabla de la condicional puede ser resumida lingüísticamente de cualquiera de las siguientes formas: Una condicional es verdadera siempre, menos cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso. Una

condicional es verdadera cuando el antecedente es falso o el consecuente verdadero. Una condicional es verdadera cuando el consecuente es verdadero siempre que lo sea el antecedente. La tabla de la bicondicional, por otra parte, puede ser expresada lingüísticamente así: Una bicondicional es verdadera cuando sus dos términos son verdaderos o cuando los dos son falsos. Una bicondicional es verdadera cuando sus dos términos tienen el mismo valor veritativo. En todos los casos restantes, es falsa.

Con esto contamos ya con un método para poder hacer la tabla de cualquier expresión, por muy compleja que sea. Por ejemplo, la que expresa la propiedad distributiva de la conjunción con respecto a la disyunción:

$p \ q \ r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
VVV	V	V	V	V	V	V
VVF	V	V	V	F	V	V
VFV	V	V	F	V	V	V
VFF	F	F	F	F	F	V
FVV	V	F	F	F	F	V
FVF	V	F	F	F	F	V
FFV	V	F	F	F	F	V
FFF	F	F	F	F	F	V

El hecho de salir sólo verdad en la última columna, indica que tal esquema es una proposición verdadera por estructura y no por contenido; es decir, que es verdad en cualquier caso, independientemente del contenido fáctico que se le dé. A estos esquemas o expresiones **formalmente** verdaderos se les llama **tautologías**. Todos los axiomas y teoremas del cálculo lógico de proposiciones son tautologías.

1.18 La Prueba Condicional

En todas las provincias de la matemática se hacen constantemente demostraciones. Justamente, la matemática es ciencia exacta porque no se conforma con la comprobación de sus asertos, sino que los demuestra; es decir, apela a razones, no a hechos.

Generalmente una demostración tiene la forma de $p \Rightarrow q$, donde p es la conjunción de premisas y q el teorema que se debe demostrar. De las premisas, que son axiomas o teoremas ya demostrados, se deriva o extrae lógicamente el nuevo teorema. Un ejemplo bien sencillo de este tipo de demostración es la que demuestra la propiedad reflexiva de la igualdad, página 7.

Hay muchos casos, sin embargo, en los que el teorema mismo tiene la forma de una condicional, $p \Rightarrow q$. La demostración, entonces, tiene la forma de $r \Rightarrow (p \Rightarrow q)$, donde r es la conjunción de premisas. Por el teorema lógico llamado de exportación, citado más arriba, la expresión anterior es equivalente a ésta: $(r \wedge p) \Rightarrow q$. Es decir, que este teorema justifica otro tipo de demostración, muy conveniente cuando el teorema que se demuestra es una condicional, y que consiste en derivar el consecuente del teorema, q , de la conjunción de las premisas con el antecedente de la condicional que se demuestra, $r \wedge p$, con lo cual se habrá demostrado que el teorema $p \Rightarrow q$ se deriva de r .

Este tipo de demostración se le reconoce bien fácilmente porque comienza por suponer el antecedente de lo que se quiere demostrar. Un ejemplo sencillo de una demostración condicional es la de la propiedad simétrica de la igualdad, página 13.

1.19. La Prueba por Reducción al Absurdo

Otro tipo de demostración muy frecuente en la matemática es el llamado método por reducción al absurdo. Consiste en suponer que es falso lo que se quiere demostrar, y, bajo esa suposición, llegar a una contradicción, es decir, a un absurdo. De lo que se infiere que no se puede suponer que lo que se quiere demostrar es falso, y que en consecuencia es verdadero.

La justificación lógica de esta forma de raciocinio, muy poderosa psicológicamente, la da el teorema lógico ya citado: $[(p \wedge \sim q) \Rightarrow q] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$. Es decir, que si de una conjunción de premisas p , en conjunción con la negación de un teorema q , podemos derivar ese teorema, habremos hecho lo equivalente a derivar el teorema de las premisas.

En rigor, una demostración por reducción al absurdo termina, como lo indica el teorema que la justifica o legitima, en el teorema y no en la contradicción o absurdo. Sin embargo, como es bien fácil demostrar cualquier cosa partiendo de una contradicción, generalmente se termina la prueba en el punto en que se llega a ella.

Que cualquier cosa es demostrable partiendo de una contradicción, se lo demuestra de la siguiente forma:

Dado un absurdo o una contradicción cualquiera, del tipo de $p \wedge \sim p$, podemos contar con p , porque en una conjunción verdadera ambos términos de la conjunción son verdaderos. Pero si p es verdad, también lo es $p \vee q$, donde q es una proposición cualquiera, porque en una disyunción basta un término verdadero para que sea verdadera.

Por otra parte, dada la contradicción de la que hemos partido, podemos contar igualmente con $\sim p$. Y de $p \vee q$ y $\sim p$ podemos inferir q , porque

si en una disyunción verdadera sabemos que uno de sus términos es falso, el otro término debe ser verdadero. Pero q es una proposición cualquiera. Luego, dada una contradicción o un absurdo cualquiera, cualquier cosa, todo, es demostrable. Que es lo que se quería demostrar.

La demostración anterior puede vérsela con más claridad, y de una sola mirada, si reparamos en que no hace más que mostrar el carácter tautológico o de verdad formal de la siguiente condicional: $(p \wedge \sim p) \Rightarrow q$, que es evidentemente verdadera siempre porque su antecedente es manifiestamente falso. Y ya se dijo oportunamente que una condicional con antecedente falso es verdadera.

Por ejemplo, la demostración de la unicidad del conjunto nulo y del conjunto universal, aparecida en la página 17, fue de este tipo que comentamos.

1.20 Ejercicios

1. Compruébese, tabularmente, el carácter tautológico de los teoremas de reducción al absurdo y de exportación:

- a) $[(p \wedge \sim q) \Rightarrow q] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
 b) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$

2. Demuéstrase, mediante una prueba condicional y algebraicamente, que en general,

- a) $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
 b) $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
 c) ¿Qué teoremas del álgebra de proposiciones corresponden a los anteriores?

3. Se pueden dividir los conjuntos en dos clases: aquellos que son elementos de sí mismo y aquellos que no lo son. Como ejemplos de la primera clase tenemos el conjunto de las ideas abstractas, porque él mismo es una idea abstracta; también, el conjunto de las cosas pensables, porque él mismo es una cosa pensable. Como ejemplos de la segunda clase tenemos el conjunto de los hombres, porque ese conjunto no es un hombre; el conjunto de las cosas calientes, porque él mismo no es una cosa caliente. Llamemos **extraordinarios** a los de la primera clase, puesto que realmente son pocos y excepcionales. Y llamemos **ordinarios** a los de la segunda clase. Si agrupamos todos los conjuntos ordinarios, habremos formado un conjunto que llamaremos **O**. Preguntémonos ahora si el conjunto **O** es ordinario o extraordinario. Demuéstrase, mediante el método condicional de prueba que:

- a) Si **O** es ordinario, entonces es extraordinario.
 b) Si **O** es extraordinario, entonces es ordinario.

4. Demuéstrase, por reducción al absurdo, que el complemento de cualquier conjunto es único.

Respuestas.

1. - a)

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \Rightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$[(p \wedge \sim q) \Rightarrow q] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V

b)

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

2.- a)

- | | | |
|-----|---|-----------------------|
| (1) | $A \subset B$ | [Hipótesis] |
| (2) | $\overline{A} \cap \overline{B} = \phi$ | [Def. de \subset] |
| (3) | $\overline{B} \cap \overline{A} = \phi$ | [Conmutación] |
| (4) | $\overline{\overline{B}} \cap \overline{\overline{A}} = \phi$ | [Involución] |
| (5) | $\overline{B} \subset \overline{A}$ | [Def. de \subset] |

b)

- | | | |
|-----|---|-----------------------|
| (1) | $\overline{\overline{B}} \subset \overline{\overline{A}}$ | [Hipótesis] |
| (2) | $\overline{\overline{B}} \cap \overline{\overline{A}} = \phi$ | [Def. de \subset] |
| (3) | $\overline{B} \cap \overline{A} = \phi$ | [Involución] |

- (4) $A \cap \bar{B} = \phi$ [Commutación]
 (5) $A \subset B$ [Definición]
 (6) $A \subset B \Rightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$ [Demostrado anteriormente]
 (7) $\bar{B} \subset \bar{A} \Rightarrow A \subset B$ [Demostrado, 1-5]
 (8) $A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$ [Def. de \Leftrightarrow]

El teorema del cálculo lógico de proposiciones que corresponde a cada uno de estos de la teoría de conjuntos, es, respectivamente:

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

Se llaman de contraposición.

3. a) Supóngase que O sea ordinario. Entonces O no es elemento de sí mismo, es decir, de O. Entonces no es ordinario, porque todos los conjuntos ordinarios pertenecen a O. Entonces es extraordinario.

b) Supóngase que O sea extraordinario. Entonces O es elemento de sí mismo, es decir, de O. Entonces O es ordinario, porque todos los elementos de O lo son.

Hay una manifiesta contradicción en lo anterior, porque el raciocinio (a) equivale a la demostración de que O es extraordinario, y el (b) a la de que es ordinario. Es decir, que se ha demostrado que O es ordinario y extraordinario, lo cual es palmariamente contradictorio. Lo grave de esta contradicción es que se ha llegado a ella apoyándonos en raciocinios lógicos muy simples y legítimos y en la idea aparentemente diáfana de conjunto. Para descartarla antes de que malee a la teoría de conjuntos, se introduce como principio la prohibición de conjuntos que se contengan a sí mismos como elementos. De esta forma la contradicción no aparece, pero únicamente porque no se la deja aparecer.

4.

(1) El complemento de A no es único.

Existe otro, que llamamos

A' , tal que $A' \neq A$.

[Negación de la tesis]

(2) $A' \cup A = U$

[Complemento]

(3) $A' \cap A = \phi$

[Complemento]

(4) $A \cup \phi = A'$

[Identidad]

(5) $A' \cup (A \cap \bar{A}) = A'$

[Complemento]

(6) $(A' \cup A) \cap (A' \cup \bar{A}) = A'$

[Distribución]

(7) $U \cap (A' \cup \bar{A}) = A'$

[(2), (6)]

(8) $A' \cup \bar{A} = A'$

[Identidad]

- | | |
|---|------------------|
| (9) $\overline{A} \cup \phi = \overline{A}$ | [Identidad] |
| (10) $\overline{A} \cup (A' \cap A) = \overline{A}$ | [(3), (9)], |
| (11) $(\overline{A} \cup A') \cap (\overline{A} \cup A) = \overline{A}$ | [Distribución] |
| (12) $(\overline{A} \cup A') \cap U = \overline{A}$ | [Complemento] |
| (13) $\overline{A} \cup A' = \overline{A}$ | [Identidad] |
| (14) $A' = A$ | [(8), (13)] |

Pero (14) contradice la hipótesis (1), luego (1) es falsa, luego su contradictoria, "el complemento es único", es verdad.

CAPITULO SEGUNDO

FUNCIONES ADITIVAS Y MEDIDA DE CONJUNTOS

2.1 Funciones Aditivas de Conjuntos

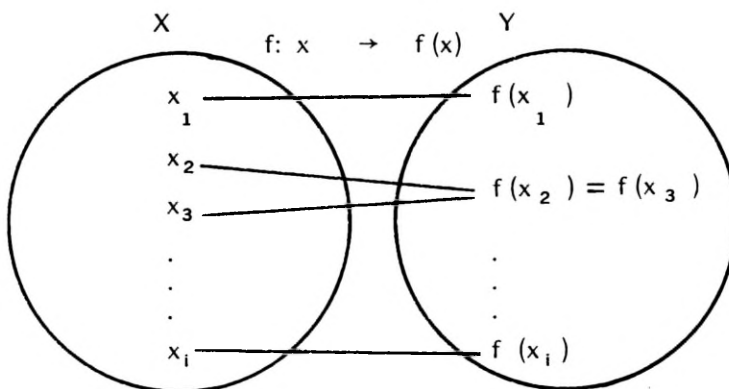
Es lo usual en la matemática moderna definir **función** (f) como una correspondencia entre dos conjuntos, en donde a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y solamente uno del segundo. Si x es un elemento del primer conjunto, se le llama **imagen** de x , (y se le representa: $f(x)$, al elemento del segundo conjunto que le corresponde. Al primer conjunto se le llama **dominio de la función** y al conjunto de las imágenes (que puede o no coincidir con el segundo conjunto) se le llama **rango de la función**.

Para expresar una función hemos de indicar no sólo su dominio y rango, sino también la regla que nos permita asociar a cada elemento del dominio la imagen que le corresponde. Generalmente esta regla de transformación viene dada en una expresión algebraica como, por ejemplo: $f(x) = 2x + 5$. Esto significa que al elemento 1 del dominio le corresponde la imagen 7, al 2.5, el 10. Etc... Sin embargo, la regla puede también venir dada por una descripción verbal.

Las funciones se expresan así:

$$f: x \rightarrow f(x)$$

Que se lee: la función efe tal que transforma o lanza la x a su imagen efe de x . Y puede ser plásticamente representada por el siguiente diagrama:



Las funciones más corrientes en matemática están definidas sobre conjuntos de números. Por ejemplo, en la función citada más arriba, o en la que tiene como regla $f(x) = x^2$, donde se hace corresponder a cada número x otro número que es el cuadrado de x . Pero una función puede también estar definida sobre una clase, es decir, sobre un conjunto de conjuntos. Cuando éste es el caso y se le hace corresponder a cada conjunto un número, tenemos lo que se llama una **función de conjuntos**, es decir, una función numérica definida sobre una clase de conjuntos.

Una función de conjuntos muy natural es la que tiene como regla el lanzar cada conjunto al número (necesariamente entero positivo o cero) de elementos que contiene. A esta función se la llama **tamaño** o **medida** de un conjunto y se la representa con la letra M , de modo que $M(A)$ es el número de elementos que contiene el conjunto A .

La función medida de un conjunto es una buena ilustración de cierto tipo de funciones de conjuntos llamadas **funciones aditivas de conjuntos**, y que se las define como funciones de conjuntos que satisfacen el siguiente axioma o condición:

$$A \cap B = \phi \Rightarrow f(A \cup B) = f(A) + f(B)$$

Es decir, una función cualquiera f de conjuntos es aditiva si, y sólo si, dados dos conjuntos disjuntos, la imagen de la unión de ellos es igual a la suma de la imagen del uno más la imagen del otro. Lo anterior no implica que una función aditiva tenga que estar definida sobre una clase de conjuntos disjuntos, sino únicamente que, si dos conjuntos son disjuntos, se satisfaga la condición del axioma.

2.2 Algunos Teoremas para Funciones Aditivas

Para toda función f aditiva, en consecuencia para la medida de conjuntos y también, como se verá después, para la probabilidad de eventos, se pueden demostrar los siguientes teoremas apoyándose en el axioma de arriba y en algunos axiomas y teoremas de la teoría de conjuntos. Se les numera porque más adelante habrá que hacer referencia a ellos. El primero de estos teoremas, que pasamos inmediatamente a demostrar, afirma que la imagen de ϕ , en toda función aditiva, es 0:

$$T - 1: f(\phi) = 0$$

Demostración:

$$\begin{array}{ll} (1) A \cap \phi = \phi & \text{[Ley de } \phi \text{]} \\ (2) f(A \cup \phi) = f(A) + f(\phi) & \text{[Axioma, (1)]} \end{array}$$

$$(3) f(A) = f(A) + f(\phi) \quad [\text{Identidad, (2)}]$$

$$(4) f(\phi) = 0 \quad [\text{Cancelación, (3)}]$$

Otra demostración de este mismo teorema es:

$$(1) \phi \cap \phi = \phi \quad [\text{Idempotencia o ley de } \phi]$$

$$(2) f(\phi \cup \phi) = f(\phi) + f(\phi) \quad [\text{Axioma, (6)}]$$

$$(3) f(\phi) = f(\phi) + f(\phi) \quad [\text{Idempotencia o identidad, (2)}]$$

$$(4) f(\phi) = 0 \quad [\text{Cancelación, (3)}]$$

T- 2: Si A, B y C son disjuntos dos a dos, entonces

$$f(A \cup B \cup C) = f(A) + f(B) + f(C)$$

Demostración:

$$(1) A \cap B = \phi \quad [\text{Hipótesis}]$$

$$(2) B \cap C = \phi \quad [\text{Hipótesis}]$$

$$(3) A \cap C = \phi \quad [\text{Hipótesis}]$$

$$(4) f(A \cup B) = f(A) + f(B) \quad [\text{Axioma, (1)}]$$

$$(5) (A \cap C) \cup (B \cap C) = \phi \quad [\text{Idempotencia, (2), (3)}]$$

$$(6) (A \cup B) \cap C = \phi \quad [\text{Distribución, (5)}]$$

$$(7) f[(A \cup B) \cup C] = f(A \cup B) + f(C) \quad [\text{Axioma, (6)}]$$

$$(8) f[(A \cup B) \cup C] = f(A) + f(B) + f(C) \quad [(4), (7)]$$

$$(9) f(A \cup B \cup C) = f(A) + f(B) + f(C) \quad [\text{Asociación, (8)}]$$

El teorema siguiente es más general que el axioma, pues no está sujeto a la restricción de que los conjuntos sean disjuntos. Tiene una importancia enorme en la teoría de la probabilidad.

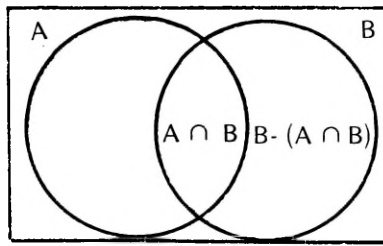
$$T- 3: f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$$

Demostración:

$$(1) (A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \phi \quad [\text{Ley de } \phi, \text{ complemento, idempotencia, conmutación, asociación}]$$

- (2) $(A \cap \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap B) = \phi$ [Complemento, idempotencia, conmutación, asociación]
- (3) $(A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B) = \phi$ [Ley de ϕ , complemento, idempotencia, conmutación, asociación]
- (4) $A = A \cap (B \cup \bar{B})$ [Complemento, identidad]
- (5) $B = B \cap (A \cup \bar{A})$ [Complemento, identidad]
- (6) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ [Distribución, (4)]
- (7) $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ [Distribución, (5)]
- (8) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$ [(6), (7) Idempotencia]
- (9) $f(A \cup B) = f[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)]$ [(8)]
- (10) $f(A \cup B) = f(A \cap B) + f(A \cap \bar{B}) + f(\bar{A} \cap B)$ [T - 2, (1), (2), (3), (9)]
- (11) $f(A) = f[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})]$ [(6)]
- (12) $f(A) = f(A \cap B) + f(A \cap \bar{B})$ [Axioma, (1), (11)]
- (13) $f(B) = f[(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)]$ [(7)]
- (14) $f(B) = f(A \cap B) + f(\bar{A} \cap B)$ [Axioma, (3), (13)]
- (15) $f(\bar{A} \cap B) = f(B) - f(A \cap B)$ [(14)]
- (16) $f(\bar{A} \cap B) = f(A \cup B) - f(A \cap B) - f(A \cap \bar{B})$ [(10)]
- (17) $f(\bar{A} \cap B) = f(A \cup B) - [f(A \cap B) + f(A \cap \bar{B})]$ [(16)]
- (18) $f(\bar{A} \cap B) = f(A \cup B) - f(A)$ [(12), (17)]
- (19) $f(A \cup B) - f(A) = f(B) - f(A \cap B)$ [(15), (18)]
- (20) $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$ [(19)]

Otra demostración más rápida e intuitiva de este importante teorema es la siguiente:



Este diagrama muestra claramente que:

$$A \cup B = A \cup [B - (A \cap B)]$$

$$B = (A \cap B) \cup [B - (A \cap B)]$$

Como las dos uniones de los miembros derechos de estas igualdades son de términos disjuntos, (véase el diagrama), la aplicación del axioma da:

$$f(A \cup B) = f(A) + f[B - (A \cap B)]$$

$$f(B) = f(A \cap B) + f[B - (A \cap B)]$$

Despejando, en la segunda igualdad:

$$f[B - (A \cap B)] = f(B) - f(A \cap B)$$

Sustituyendo en la primera:

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$$

Este teorema, como los anteriores, puede mostrarse muy intuitivamente mediante los círculos de Venn desde la interpretación de función aditiva como medida de conjunto.

Efectivamente, la medida del conjunto $A \cup B$ lo obtenemos sumando las medidas de A y B , pero como quiera que pueden haber elementos en común, estos elementos han sido sumados dos veces, y ha de restársele a la suma, en consecuencia, el número que de ellos haya, que es la medida de la intersección.

El teorema siguiente es una generalización del anterior para tres conjuntos:

$$T-4: f(A \cup B \cup C) = f(A) + f(B) + f(C) - f(A \cap B) - f(A \cap C) - f(B \cap C) + f(A \cap B \cap C)$$

Demostración:

$$(1) f[(A \cup B) \cup C] = f(A \cup B) + f(C) \\ - f[(A \cup B) \cap C] \quad [T-3]$$

$$(2) f(A \cup B \cup C) = f(A) + f(B) - f(A \cap B) + \\ + f(C) - f[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \quad [\text{Asociación,} \\ T-3, \text{Distribución,} \\ (1)]$$

$$(3) f(A \cup B \cup C) = f(A) + f(B) + f(C) \\ - f(A \cap B) - f(A \cap C) \\ - f(B \cap C) + f(A \cap B \cap C) \quad [T-3, \text{Idempotencia,} \\ (2)]$$

2.3 Aplicaciones para Medida de Conjuntos

La aplicación del teorema 4, interpretado para medida de conjuntos, puede ilustrársela fácilmente. Por ejemplo:

En una encuesta sobre un grupo de estudiantes se encontró que 55 de ellos estudiaban álgebra, 38 biología y 51 cibernética. Además, que 15 de ellos estudiaban álgebra y biología, 13 álgebra y cibernética, 3 biología y cibernética, y 3 estudiaban las tres asignaturas. Se quiere saber el número de estudiantes que fueron considerados. Como este número es $M(A \cup B \cup C)$, y la información dada es $M(A) = 55$, $M(B) = 38$, $M(C) = 51$, $M(A \cap B) = 15$, $M(A \cap C) = 13$, $M(B \cap C) = 3$, $M(A \cap B \cap C) = 3$, la aplicación del teorema 4 da:

$$M(A \cup B \cup C) = 55 + 38 + 51 - 15 - 13 - 3 + 3 = 116$$

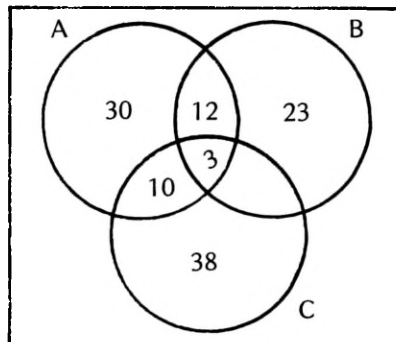
Si además quisiéramos saber cuántos de los alumnos estudian únicamente álgebra, a los 55 que estudian álgebra habría que restarle el número de los que estudian, además de álgebra, biología o cibernética; es decir, $55 - M[(A \cap (B \cup C))]$. Pero $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, y el número $M[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$ es fácilmente computable con la información dada y el teorema 3:

$$M[(A \cap B) \cup (A \cap C)] = 15 + 13 - 3 = 25$$

En consecuencia, $55 - 25 = 30$ estudian álgebra únicamente.

Este problema se habría podido resolver mucho más sencillamente mediante los diagramas de Venn, pero este método es inoperante con más de tres conjuntos. El teorema 4, en cambio, puede generalizarse para cualquier número de conjuntos.

Con los diagramas, el problema se resuelve poniendo en las regiones correspondientes el número de elementos que contiene, comenzando, en este caso, por la intersección de los tres conjuntos:



El número total de estudiantes es la suma de todos los números que aparecen. De paso hemos averiguado cuántos estudian sólo álgebra, sólo biología y sólo cibernética. Además, el número de los que estudian álgebra y biología pero no cibernética, y álgebra y cibernética pero no biología. No hay ninguno que estudie biología y cibernética pero no álgebra.

2.4 Ejercicios

1. Generalizar el teorema 4 para cuatro conjuntos.

(En los problemas que siguen, conviene encontrar las respuestas mediante la aplicación de los teoremas, y recurrir al método de Venn sólo para comprobación).

2. De un grupo de 80 estudiantes entrevistados, 40 estudian biología, 34 química y 40 física. 20 estudian biología y química, 25 biología y física, 15 química y física, y 9 biología, química y física.

- ¿Cuántos alumnos hay en el grupo considerado que no estudia ninguna de las ciencias?
- ¿Cuántos estudian biología únicamente?
- ¿Cuántos química únicamente?
- ¿Cuántos física únicamente?

3. De un grupo de 100 estudiantes se sabe que 20 estudian solamente biología, 17 solamente química, 21 solamente física. 20 estudian biología y química, 15 química y física, 10 biología y física. 5 estudian las tres asignaturas.

$$\begin{aligned}
 (3) f(A \cup B \cup C \cup D) &= f(A) + f(B) + f(C) \\
 &+ f(D) - f(A \cap B) - f(A \cap C) \\
 &- f(B \cap C) + f(A \cap B \cap C) - f(A \cap D) \\
 &- f(B \cap D) - f(C \cap D) + f(A \cap B \cap D) \\
 &+ f(A \cap C \cap D) + f(B \cap C \cap D) - f(A \cap B \\
 &\cap C \cap D) \qquad \qquad \qquad [T-4, (2)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) f(A \cup B \cup C \cup D) &= f(A) + f(B) + f(C) \\
 &+ f(D) - f(A \cap B) - f(A \cap C) \\
 &- f(B \cap C) - f(A \cap D) - f(B \cap D) \\
 &- f(C \cap D) + f(A \cap B \cap C) + f(A \cap B \cap \\
 &D) + f(A \cap C \cap D) + f(B \cap C \cap D) \\
 &- f(A \cap B \cap C \cap D) \qquad \qquad \qquad [(3)]
 \end{aligned}$$

2.- a) 17; b) 4; c) 8; d) 9.

3.- a) 93; b) 45; c) 47; d) 41; e) 48.

4. La fórmula indica que 1089 personas leen alguno de los diarios, lo cual es contradictorio con la información de que la encuesta se ha realizado sobre 1000 personas.

5.- a) 2; b) 11; c) 55; d) 17

6.- 47

2.5 Conjuntos Ordenados, (Nuplas).-

Por lo mismo que la noción de orden no interviene en la de conjunto, el orden en que aparecen los elementos de un conjunto es totalmente indiferente. Por esta razón $\{a, b\} = \{b, a\}$ En esta sección introducimos el concepto de **conjunto ordenado** o **nupla**.

Considérese el conjunto $\{a, \{a, b\}\}$ Es obvio que $\{a, \{a, b\}\} = \{\{a, b\}, a\}$, pero diferente a $\{b, \{a, b\}\}$, a menos que $\{a\} = \{b\}$. Si ahora definimos la expresión (a, b) así:

$$(a, b) = \text{df } \{a, \{a, b\}\}$$

Tendremos que $(a, b) \neq (b, a)$, a menos que $\{a\} = \{b\}$. A (a, b) le llamamos un **par ordenado**, donde se dice que a es el **primer componente** y b el **segundo componente**.

De igual forma pueden introducirse **tríos ordenados**, definiéndolos así:

SITV 8

$$(a, b, c) = \text{df } \{ a, \{ a, b \}, \{ a, b, c \} \}$$

Y en general, nuplas de n componentes:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{df } \{ a_1, \{ a_1, a_2 \}, \{ a_1, a_2, a_3 \}, \dots, \{ a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \} \}$$

Conviene mucho tomar nota de que en una nupla el puesto que cada elemento ocupa es importante, y que por lo mismo, para que dos nuplas sean iguales no basta, como en el caso de los conjuntos ordinarios, que tengan los mismos elementos, sino que, además, deben ocupar los mismos puestos.

Son muchos, y muy importantes, los casos en que es necesario echar mano al concepto de nupla. En geometría analítica, por ejemplo, se hace corresponder cada punto del plano con un par de números, pero con un par ordenado, pues el punto determinado por el par (x, y) es totalmente distinto del punto (y, x) . A menos, claro está, de que $x = y$.

2.6 Conjunto Producto

Se le llama **conjunto producto**, por una razón que aparecerá enseguida, a un conjunto cuyos elementos son nuplas formadas por componentes que proceden, cada uno de ellos, de un conjunto determinado. Así, por ejemplo, si $A = \{ a, b \}$ y $B = \{ 1, 2, 3 \}$, $\{ (a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3) \}$ es un conjunto producto formado de los conjuntos A y B.

Un conjunto producto de dos conjuntos X, Y, se le forma con pares ordenados en donde los elementos de X ocupan el primer puesto y los de Y el segundo. A esta operación se la llama la del **producto cartesiano** y se la indica, al igual que el producto aritmético, con una pequeña x, o simplemente con un punto o un espacio en blanco. El producto cartesiano de dos conjuntos X, Y, se lo define así:

$$X \times Y = \text{df. } \{ (x, y): x \in X \wedge y \in Y \}$$

Y en general:

$$X \times Y \times Z \times \dots = \text{df } \{ (x, y, z, \dots): x \in X \wedge y \in Y \wedge z \in Z \dots \}$$

El producto cartesiano, que es asociativo, no goza de la propiedad conmutativa sin embargo. $X \times Y \neq Y \times X$, a menos, claro está, que $X = Y$. Si éste es el caso, $X \times X$ se abrevia X^2 . Y, en general, $X^n = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$.

Hay una estrecha relación entre el producto cartesiano y el aritmético:

$$[M(X) = n \wedge M(Y) = m] \Rightarrow M(X \times Y) = n \times m$$

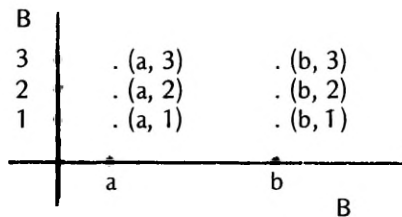
Es decir, que el número de elementos (pares) que contiene el producto cartesiano $X \times Y$ es igual al producto aritmético del número de elementos que contiene X por el número de elementos que contiene Y . En general, la medida de un producto cartesiano cualquiera es igual al producto aritmético del número de elementos que cada uno de sus factores tiene:

$$M(A \times B \times C \times \dots) = M(A) \times M(B) \times M(C) \times \dots$$

Este principio, llamado **principio del producto cartesiano**, tiene un carácter muy fundamental en el análisis combinatorio que juega un papel importante en la teoría de la probabilidad.

Por ejemplo, si $A = \{a, b\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, $M(A \times B) = M(A) \times M(B) = 2 \times 3 = 6$. Más arriba se hizo una lista de estos 6 pares.

Es muy conveniente representar gráficamente un producto cartesiano, al estilo de la geometría analítica. El producto $A \times B$ de más arriba se lo representa así:



Una manera práctica de plantearse el problema de averiguar la medida de un producto cartesiano, sabido el número de puestos (componentes) que tienen sus elementos, (es decir, el número de conjuntos que se multiplican), es multiplicando entre sí el número de maneras en que puede llenarse cada puesto, que en cada caso corresponde al número de elementos del conjunto que ocupa ese puesto.

Por ejemplo, una señora tiene 4 faldas, 5 blusas y 3 pares de zapatos. ¿De cuántas diferentes formas puede vestirse? Cada una de estas formas es un trío ordenado, uno de cuyos componentes es la falda, otro la blusa y otro el par de zapatos. Como uno de los puestos puede llenarse de 4 formas diferentes, otro de 5 y otro de 3, el resultado es $4 \times 5 \times 3 = 60$.

2.7 Ejercicio

1. Un fabricante de automóviles produce 3 motores de diferente potencia, cada uno de los cuales puede ser instalado en cualquiera de las carrocerías que fabrica, 2 deportivas y 2 corrientes, que puede pintar de 3 colores diferentes. ¿Cuántos tipos de automóviles puede producir?

2. ¿Cuántas diferentes parejas pueden formarse con un conjunto de 13 varones y otro de 12 mujeres?

3. ¿Cuántas palabras de dos letras, con o sin sentido, formadas por una consonante seguida de una vocal, pueden hacerse con las letras de la palabra "probabilidad".

Respuestas.—

1.— 36

2.— 156

3.— 15

2.8 Muestras.—

Un tipo de nuplas que van a aparecer con mucha frecuencia más adelante son las llamadas **muestras**. Por **muestra** se entiende una nupla elemento del conjunto producto formado por la potencia de algún conjunto. También se le llaman **muestras** a los elementos (nuplas) de una potencia de algún conjunto cuando de ésta se han restado las nuplas con componentes repetidos. A las primeras se les llama **muestras con reposición** y **muestras sin reposición** a las segundas. Al conjunto (factor) original, por otra parte, se le llama **población**.

Un ejemplo para cada una de estas muestras aclarará las definiciones anteriores y justificará los nombres elegidos. Dado un conjunto de medida 4, $A = \{a, b, c, d\}$, y que llamamos **población**, algunas muestras con reposición de medida 3, de esa población, son:

(a,a,b)	(c,c,c)
(a,b,c)	(d,a,a)
(a,d,a)	(b,d,a)

Después veremos que hay $4^3 = 64$ de estas muestras. Como se repone en la población cada elemento suyo antes de sacar el próximo, resulta claro que el tamaño o medida de una muestra con reposición puede ser mayor que el de la población.

Otros ejemplos de muestras con reposición son: los resultados posibles de tirar un dado 3 veces. He aquí algunos:

(1,2,6)
(1,4,4)
(3,3,3)

Igualmente los casos posibles de la tabla lógica de una expresión de cuatro variables. Algunos son:

(V,V,V,V)
 (F,F,F,F)
 (V,F,V,V)

Por otra parte, y volviendo a la población $A = \{ a,b,c,d \}$, muestras sin reposición de medida 3, serían, entre otras:

(a,b,d) (c,b,a)
 (a,b,c) (b,d,a)
 (d,a,c) (d,c,b)

Después veremos que de estas muestras hay $4 \times 3 \times 2 = 24$

Otros ejemplos de muestras con reposición. Supóngase que tenemos como población el conjunto de unas bolitas, algunas azules y otras blancas, en una urna. Sacamos al azar tres bolitas, una después de la otra. Después volvemos a repetir la operación varias veces, (necesariamente un número menor de veces que el de bolitas en la urna). Algunos de los resultados son:

(A,B,A)
 (A,A,A)
 (A,B,B)

No hay ninguna contradicción entre el hecho de que haya bolitas del mismo color en una muestra sin reposición y el de que esta muestra proceda de un conjunto producto del que se ha restado las nuplas con componentes repetidos, porque son bolitas diferentes aunque del mismo color. Si se numeraran estas bolitas se vería claramente que nunca aparece una muestra con componente repetido.

La fórmula para encontrar el número de muestras con reposición posibles se deriva inmediatamente del principio del producto cartesiano. Si la población mide n y la muestra r , es obvio que cada uno de los r puestos de la nupla puede ser llenado de n formas diferentes. En total, pues, hay n^r de tales muestras:

$$nMRr = n^r$$

La notación del miembro izquierda de esta igualdad puede leerse: Muestras con reposición de medida r tomadas de una población de medida n . O, también: Muestras con reposición de n elementos tomados de r en r .

Algunas veces se les llama **arreglos con repetición** y también **variaciones con repetición** a esta clase de muestras.

El número de muestras sin reposición, en cambio, se lo encuentra del siguiente modo: Si la población mide n , el primer puesto de la nupla puede ser ocupado por n elementos de la población, el segundo, sin embargo, sólo por $n-1$, porque uno de ellos está ya ocupando el primer puesto; el tercero

por $n-2$, etc..., hasta llegar al último puesto, o sea el r -ésimo, que podrá ser ocupado sólo por $n-r + 1$. La fórmula, entonces, que se deriva igualmente del producto cartesiano, es:

$$nMr = n (n-1) (n-2) \dots (n-r + 1)$$

donde $r \leq n$

En este punto conviene introducir una definición que nos permita abreviar la fórmula anterior y otra que aparecerá después.

$$n_j = \text{df } n (n-1) (n-2) \dots 3 \times 2 \times 1$$

“ n_j ” se lee: n factorial, o también, factorial de n .

Por la definición se ve con claridad que

$$n_j = n (n-1)_j$$

En particular, en consecuencia:

$$1_j = 1 (1-1)_j = 1 \times 0_j = 0_j$$

Como $1_j = 1$, resulta que $0_j = 1$

Es interesante comprobar lo vertiginosamente rápido que crecen los números afectados por el operador $!$. No es nada gratuito el que se haya elegido el signo de la admiración. 10, por ejemplo, es ya más de tres millones y medio.

James Stirling, un matemático escocés de hace más de dos siglos, ideó una fórmula para aproximarse a estos números muy difícilmente computables por vía ordinaria. En esta introducción nosotros nos limitaremos a dejar indicada la operación, salvo en casos muy sencillos.

Con esta notación ganada, volvemos ahora a la fórmula:

$$nMr = n (n-1) (n-2) \dots (n-r + 1)$$

Para expresarla más compactamente, multiplicamos y dividimos su miembro derecho por $(n-r) (n-r-1) (n-r-2) \dots 3 \times 2 \times 1$:

$$nMr = \frac{n(n-1) (n-2) \dots (n-r + 1) (n-r) (n-r-1) (n-r-2) \dots 3 \times 2 \times 1}{(n-r) (n-r-1) (n-r-2) \dots 3 \times 2 \times 1}$$

Que se simplifica en: $nMr = \frac{n!}{(n-r)!}$

Donde $r < n$

2.9 Permutaciones.—

Un caso particular muy interesante de muestras sin reposición son las llamadas **permutaciones**. Una **permutación** es una muestra sin reposición en donde $r = n$, es decir, una muestra sin reposición con la misma medida que la población.

La fórmula para establecer el número de permutaciones posibles de n elementos se la puede derivar inmediatamente de la anterior. Efectivamente, $n = r$ porque se trata de una permutación. Entonces

$$P_n = nM_n = \frac{n!}{0!} = n!$$

Por ejemplo, el número de órdenes distintos en los que pueden estar las cartas de un mazo, es el de las permutaciones de 52 elementos, o sea $52!$ Este número es astronómicamente grande, tiene 68 dígitos. Ya advertimos que la admiración del operador factorial no es puramente tipográfica.

Sucede con frecuencia que queremos considerar idénticos algunos componentes distintos de una permutación, y en consecuencia como una misma permutación las que difieran únicamente en esos componentes. Por ejemplo, si queremos que $a_1 = a_2$, $(a_1, a_2, b, c) = (a_2, a_1, b, c)$.

Para derivar la fórmula que regula estos casos, consideramos las permutaciones posibles de n elementos. Estas son $n!$. Si hay r_1 elementos idénticos de una clase, r_2 de otra clase, etc..., hay en las $n!$ permutaciones $r_1!$ y $r_2!$ etc... permutaciones idénticas que deben contar por una sola. En consecuencia:

$$P_n^{r_1, r_2, \dots} = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots}$$

Es el número de permutaciones de n elementos donde hay r_1 elementos de una clase, r_2 de otra, etc...

Por ejemplo, si tiramos una moneda a cara o sello y queremos saber de cuántas diferentes formas pueden salir dos caras, habría que contar el número de permutaciones de la población $\{C, C, S, S, S, S, S, S, S\}$ O sea, las del tipo $(S, S, C, S, C, S, S, S, S)$, que de acuerdo con la fórmula de arriba es

$$P_{10}^{2,8} = \frac{10!}{2! 8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{2! 8!} = 45$$

Tómese nota de que la permutación de arriba (S,S,C,S,C,S,S,S,S,S) también es una de las muestras con reposición de medida 10 tomadas de una población de medida 2, sólo que de éstas hay 2^{10}

2.10 Combinaciones.—

Una **combinación** no es más que un subconjunto de la población. Si la población tiene n elementos y la combinación r elementos, hablamos entonces de la combinaciones de n elementos tomados de r en r , que se denota

$$\binom{n}{r}$$

La diferencia capital, entonces, entre una muestra y una combinación, es que en ésta el orden de los elementos no juega ningún papel.

Por ejemplo, dado un conjunto con cuatro elementos, $\{a,b,c,d\}$, podemos formar los siguientes seis subconjuntos suyos con dos elementos:

$$\begin{array}{cc} \{a,b\} & \{b,c\} \\ \{a,c\} & \{b,d\} \\ \{a,d\} & \{c,d\} \end{array}$$

Estos seis subconjuntos del conjunto considerado son las combinaciones de cuatro elementos tomados de dos en dos.

La fórmula que determina las combinaciones de n elementos tomados de r en r , se la deduce del siguiente modo:

Las muestras sin reposición de n elementos tomados de r en r es igual a las combinaciones de n elementos tomados de r en r multiplicadas por $r!$ porque de cada combinación con r elementos se pueden formar $r!$ muestras sin reposición de r elementos tomados de r en r , (permutaciones de r elementos):

$$nMr = \binom{n}{r} \times r!$$

De donde:

$$\binom{n}{r} = \frac{nMr}{r!}$$

Usando la fórmula ya conocida para las muestras sin reposición de n elementos tomados de r en r , tenemos:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

Esta fórmula es igualmente aplicable al problema con que ilustramos las permutaciones con elementos idénticos de la sección anterior. Efectivamente, en vez de preguntarnos por las permutaciones posibles de la nupla (C,C,S,S,S,S,S,S,S,S), podemos preguntarnos por el número de combinaciones posibles con los elementos del conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ tomados de dos en dos, en donde cada número indica el puesto en la nupla ocupado por C. Así, la combinación $\{2,4\}$ corresponde a la nupla (S,C,S,C,S,S,S,S,S,S). La aplicación de la fórmula da el mismo resultado que el obtenido en la sección 2.9:

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{(10-2)! 2!} = 45$$

También se podría buscar las combinaciones de 10 elementos tomados de ocho en ocho. En este caso los números de cada combinación representan los puestos que ocupan los S:

$$\binom{10}{8} = \frac{10!}{(10-8)! 8!} = 45$$

Más adelante se demostrará que, en general:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

2.11 Ejercicios

2. Dada una población con 4 elementos, $\{1,2,3,4\}$,
 - a) hacer una lista de todas las muestras con reposición de medida 2.
 - b) Hacer una lista de todas las muestras sin reposición de medida 2.
 - c) Hacer una lista de todas las combinaciones de medida 2.
 - d) Hacer una lista de todas las permutaciones.
 - e) Hacer una lista de todas las permutaciones pero suponiendo que el 1 y el 4 fuesen indistinguibles.

2. ¿En cuántos distintos órdenes de sucesión pueden conectarse 5 de 7 alambres distintos de un aparato eléctrico a 5 terminales distintos de otro aparato eléctrico?

3. a) ¿En cuántas diferentes formas puede un entrenador destinar corredores, de un total de 12, a las 9 posiciones primeras del orden en que deben salir a la pista?

b) ¿En cuántas diferentes formas puede seleccionar un equipo de 9 de los 12 corredores, sin tener en cuenta las posiciones en que habrán de salir a la pista?

4. ¿Cuántas manos de póker diferentes son posibles? (El mazo de cartas tiene 52 cartas y cada mano de póker 5)

5. ¿En cuántas diferentes formas pueden ponerse en fila 30 soldados y 5 sargentos, si los sargentos deben ocupar los primeros puestos de la fila? (Sin hacer la aritmética)

6. Se tira una moneda 10 veces. ¿De cuántas diferentes formas pueden salir 7 caras y 3 sellos?

7. Un equipo va a jugar 9 partidas. ¿De cuántas diferentes formas puede ganar 4 partidas, empatar 2 y perder 3?

Respuestas.

1.- a)

(1,1) (2,1) (3,1) (4,1)
 (1,2) (2,2) (3,2) (4,2)
 (1,3) (2,3) (3,3) (4,3)
 (1,4) (2,4) (3,4) (4,4)

b)

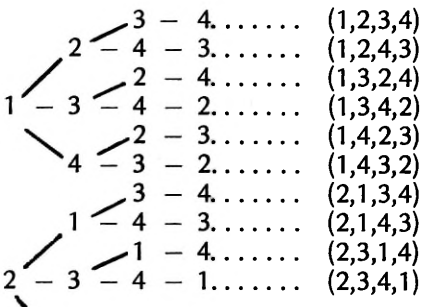
(1,2) (2,1) (3,1) (4,1)
 (1,3) (2,3) (3,2) (4,2)
 (1,4) (2,4) (3,4) (4,3)

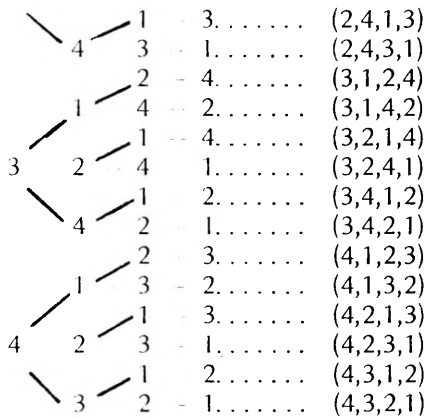
c)

{ 1,2 } { 2,3 }
 { 1,3 } { 2,4 }
 { 1,4 } { 3,4 }

d)

El siguiente método, llamado **diagrama de árbol** y que se explica por sí solo, es muy conveniente para resolver casos como el presente:





c)

- | | |
|-----------|-----------|
| (1,2,3,4) | (2,1,3,4) |
| (1,2,4,3) | (2,1,4,3) |
| (1,3,2,4) | (2,3,1,4) |
| (1,3,4,2) | (3,1,2,4) |
| (1,4,2,3) | (3,1,4,2) |
| (1,4,3,2) | (3,2,1,4) |

- 2.- 2520
- 3.- a) 79833600; b) 220
- 4.- 2598960
- 5.- $5! \times 30!$
- 6.- 120
- 7.- 1260

CAPITULO TERCERO

LOS CONCEPTOS Y LAS PROPOSICIONES FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE LA PROBABILIDAD

3.1 Historia

En ocasión de un juego interrumpido y que en consecuencia planteaba el problema de cómo dividir equitativamente el dinero apostado, Blas Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665) se cruzaron unas cartas en donde se le abrió a la matemática una nueva ventana: la teoría de la probabilidad. Con ello llevaron a la fría óptica de los números el tema de la incertidumbre, tan íntimamente hermanado en la vida con la angustia, la indecisión y la esperanza. En la filosofía, la teoría de la probabilidad ha dado mucho que decir y pensar. La matemática, por otra parte, no logra aún agotar todas las potencialidades de esta teoría, presentándola como un cálculo cada vez más bello y elegante. Por último, para la metodología científica, la teoría de la probabilidad es un instrumento poderosísimo del cual ya no podría prescindir.

Muchos son los pensadores que han hecho aportes importantes en la elaboración de la teoría de la probabilidad. Especialmente nos interesa registrar, además del de Pascal en el siglo XVII, los nombres de Laplace y Boole en el XIX. Ya en la centuria nuestra, se le debe a R. von Mises el enfoque moderno de la teoría y a A. Kolmogorov su presentación formal y axiomática.

3.2 Concepto Clásico de Probabilidad

Es curioso cómo la teoría de la probabilidad fue descubierta principalmente por pensadores que negaban precisamente la existencia del azar. Tal es el caso de Laplace, para cuyo determinismo mecanicista todo cuanto sucede está determinado, predestinado, por causas físicas, mecánicas. Como al hombre le es imposible el conocimiento de **todas** las causas físicas que intervienen en un fenómeno cualquiera, Laplace (y todos los pensadores de la primera época de la teoría) concibe la probabilidad como una **medida de nuestra ignorancia** y no como una propiedad objetiva de los fenómenos. Decir que el resultado de un experimento era probable o incierto, era lo mismo que reconocer nuestra ignorancia con respecto a todas las causas que en él intervenían, (la distribución del peso de la moneda, las corrientes de aire, la fuerza del dedo, etc..., en el experimento de tirar una moneda a cara o sello, por ejemplo). Esta concepción clásica de la probabilidad la definía

como la razón entre el número de resultados favorables al evento de cuya probabilidad se trataba y el número de resultados posibles, favorables o no. En el experimento de tirar al aire una moneda, los resultados favorables a la verificación del evento de que salga cara es uno sólo, los posibles en cambio son dos, (cara y sello); en consecuencia, la probabilidad del evento de que salga cara es $1/2$. En el experimento de tirar un dado, los resultados favorables al evento de que salga un número (de puntos) mayor que 4 son dos, (5 y 6), y los posibles, seis. En consecuencia, la probabilidad de ese evento es $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Esta definición de probabilidad supone, pues, que todos los resultados son igualmente probables, teniéndose que constreñir la teoría a los casos que se dan especialmente en los llamados juegos de azar. Asignarle un valor de probabilidad a un evento, de acuerdo con esta definición, no implica ninguna experimentación. Basta contar los resultados favorables y los posibles, y dividir el primer número por el segundo, para obtener esa probabilidad que acertadamente se la llama a priori, es decir, independiente de la experiencia.

3.3 Concepto Moderno de Probabilidad

La teoría moderna, en cambio, presenta otro concepto, el estadístico o a posteriori, de la probabilidad. Con el propósito de poder tratar igualmente aquellos experimentos cuyos resultados no tienen la misma probabilidad, la asignación de valor de probabilidad de un resultado viene dada por la razón entre el número de veces que ha sucedido el resultado en cuestión y el de las veces que pudo haber sucedido, esto es, el de las veces que se ha realizado el experimento. Por ejemplo, para asignarle un valor de probabilidad al resultado de salir sello, en el experimento de tirar una moneda, se lo realiza muchas veces, digamos unas mil, y se divide entonces el número de veces que ha salido sello por mil. Si ha salido sello 600 veces, la probabilidad que se le asigna al resultado es $\frac{600}{1000} = \frac{3}{5}$, si ha salido 500 veces, se le asigna el valor de $\frac{1}{2}$, etc... La asignación de probabilidad a los resul-

tados posibles de un experimento se hace, así, después de una repetición numerosa del experimento que, por esto mismo, debe tener un carácter de repetible. Desde esta perspectiva, no es necesaria ninguna hipótesis metafísica determinista. Por el contrario, queda abierta la posibilidad de que la probabilidad sea una propiedad objetiva de fenómenos indiferentes.

Muchas veces, sin embargo, se ponen como ejemplos juegos de azar, y suponemos entonces que la probabilidad estadística se aproxima a la a priori. Como esta última es más cómoda de computar, ya que no implica

ninguna experimentación, es la que se emplea. Es natural y fácil imaginarse que el peso de las monedas y de los dados con los que resulta práctico ilustrar la teoría, está uniformemente distribuido, haciendo que todos sus lados sean igualmente probables de salir.

Por lo demás, a la teoría no le importa cómo ha sido computada la probabilidad de los resultados, si por experimentación o por hipótesis. La teoría (como todo sistema matemático, por otra parte) se refiere a modelos ideales, a experimentos imaginados, y no es incumbencia suya si estos modelos son o no aplicables a casos concretos. Ella sólo se compromete a calcular la probabilidad de los eventos en función de la de los resultados que los verifican, y que se supone dada. Por supuesto, el modelo se elige de modo que sea aplicable. Así, por ejemplo, si queremos computar la probabilidad de algún evento que puede verificarse al tirar monedas o dados, no consideraremos en el modelo, en el experimento ideal, la posibilidad de que la moneda o el dado caigan sobre un borde, o que rueden y se pierdan, aunque éstas son posibilidades reales.

3.4 Concepto Intuitivo de Probabilidad

El concepto de probabilidad se lo emplea también asociado a la verdad de ciertas proposiciones (y no a eventos), como en “Es probable que la Atlántida haya existido”, o ésas que resultan de un raciocinio inductivo del tipo de “El oro es un metal y un buen conductor de la electricidad. El hierro es un metal y un buen conductor de la electricidad. La plata es un metal y un buen conductor de la electricidad. En consecuencia, es probable que todos los metales sean buenos conductores de la electricidad”. Esta probabilidad, diferente de la estadística que consideraremos, se llama *intuitiva*, seguramente porque es la que mejor coincide con el concepto pre-científico de probabilidad. Hay que advertir, empero, que la probabilidad intuitiva puede también ser tratada matemáticamente. Y también que no debe confundirse con la probabilidad de eventos cuando la teoría de la probabilidad estadística se la interpreta asociando la probabilidad a la verdad de la proposición que afirma la verificación del evento.

3.5 Espacio de Muestra

Por experimento ha de entenderse una operación, o serie de operaciones, que da ciertos resultados. Así, patear una pelota, multiplicar dos números, tirar un dado, ver si un recién nacido es hombre o mujer, etc..., son experimentos. Cuando del conjunto de resultados posibles de un experimento no puede ser previsto con certeza, por alguna razón, el resultado que se verificará, se le llama *aleatorio* al experimento. Como la teoría de la probabilidad se interesa exclusivamente en esta clase de experimentos, en

vez de **experimento aleatorio**, diremos sólo **experimento**, dándose por supuesto su carácter de aleatorio o azaroso.

Al conjunto de resultados posibles de un experimento cualquiera se le va a llamar **espacio de muestra**, o, más sencillamente, **espacio**. Para que un conjunto de resultados de un experimento pueda funcionar como espacio, se requiere que cumpla con estas dos condiciones:

1. Que sea **exhaustivo**. Es decir, que todos los resultados posibles, desde el criterio adoptado, sean miembros del conjunto.
2. Que sea **exclusivo**. Es decir, que la aparición de cada uno de los resultados excluya la posibilidad de cualquier otro.

Por ejemplo, para el experimento de tirar un dado el conjunto $\{1,2,3,4,5\}$, donde cada número indica el lado que contiene ese número de puntos, no es un espacio legítimo porque no contiene el resultado posible de salir el lado con 6 puntos. Es decir, no es exhaustivo. El conjunto $\{\text{número par, número impar, número mayor que } 5\}$, tampoco es legítimo como espacio porque no es exclusivo, ya que podría salir un número par y mayor que 5, (el 6).

A los elementos del espacio, que hasta aquí se les ha venido llamando informalmente **resultados**, se les llamará **puntos**. La notación para los puntos será $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$. Y para el espacio: $E = \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n\}$ Los conceptos

de punto y espacio coinciden plenamente con los de elemento o miembro y conjunto universal, respectivamente, de la teoría de conjuntos.

Para un mismo experimento se puede adoptar diferentes espacios. Esto depende del criterio que se siga. Así, en el experimento de sacar al azar una carta de un mazo puede tomarse como espacio las figuras, o bien el número y la figura, o incluso el estado físico de la carta, quemada o no. El primero de estos espacios contiene cuatro puntos, cincuenta y dos el segundo, y sólo dos el tercero. Sin embargo, una vez elegido el espacio más conveniente, ya no se puede cambiar o introducir otro; a menos, claro está, que el problema vuelva a ser planteado radicalmente.

El carácter de elemental de esta introducción a la teoría de la probabilidad exige que se consideren sólo espacios finitos, es decir, aquellos que contienen un número finito de puntos.

3.6 Eventos y Operaciones con Eventos

Por **evento** se entiende cualquier subconjunto del espacio. Por otra parte, un punto es miembro de un evento si y sólo si lo verifica, es decir, si le es favorable. Así, por ejemplo, dado el espacio $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ para

el experimento de tirar un dado, el conjunto $A = \{2,4,6\}$ es un evento, (el de salir un número par). Igualmente lo es $B = \{1,2,3\}$ (el de salir un número menor que 4). Los eventos, precisamente por ser conjuntos, se denotan con letras latinas mayúsculas A, B, C, ...

A la luz del análisis combinatorio y de la teoría de conjuntos, se sabe que dado un espacio con n puntos, hay 2^n eventos posibles. Incluyendo el evento que no contiene ningún punto y que por lo mismo no se verifica nunca, (a ese evento se le llama el evento imposible y se le representa así: ϕ , porque corresponde al conjunto nulo o vacío). E igualmente al evento que contiene todos los puntos y que por eso se verifica siempre, (a este evento se le llama el evento seguro y se lo representa así: E, porque corresponde al conjunto universal).

La existencia de estos dos eventos, el imposible y el seguro, viene exigida por la definición de evento como subconjunto del espacio. En efecto, la teoría de conjuntos demuestra que todo conjunto es subconjunto de sí mismo. En consecuencia, el espacio, como conjunto que es, es subconjunto del espacio, y por eso un evento. Igualmente demuestra que el conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto, y en consecuencia del espacio y por eso mismo un evento.

Por ejemplo, dado el espacio $E = \{1,2,3,4\}$ para el experimento de tirar un dado tetraedro, los eventos posibles o subconjuntos de ese espacio son los siguientes $2^4 = 16$:

$$\begin{array}{cccc}
 \{1\} & \{1,2\} & \{2,4\} & \{1,3,4\} \\
 \{2\} & \{1,3\} & \{3,4\} & \{2,3,4\} \\
 \{3\} & \{1,4\} & \{1,2,3\} & \{\} = \phi \\
 \{4\} & \{2,3\} & \{1,2,4\} & \{1,2,3,4\} = E
 \end{array}$$

Tómese nota de que a pesar de haber diferencia entre un punto cualquiera y el evento que contiene ese punto sólo, (lo segundo es un evento, lo primero no), podemos considerar los puntos como eventos que solamente contienen un punto, es decir, como eventos unitarios, pues así se les llama. Esto permite una uniformidad conveniente.

Como los eventos son conjuntos, con ellos pueden realizarse todas las operaciones de la teoría de conjuntos. Así, $A \cup B$ es el evento que se verifica si y sólo si se verifica A o B, o ambos; es decir, cuando se verifica por lo menos uno de los dos eventos. $A \cap B$ es el evento que se verifica si y sólo si se verifican A y B simultáneamente. A^c es el evento complementario de A y se verifica si y sólo si A no se verifica. $A - B$ es el evento que se verifica si y sólo si se verifica A pero no B. $A \Delta B$ es el evento que se verifica si y sólo si se verifica A o B, pero no ambos. Por último, la relación $A \subset B$, que se lee: "A subevento de B", es la que se da entre dos eventos A, B,

cuando la verificación de A implica la de B. “ $A \subset B$ ” es, pues, una proposición y no un evento. Otro tanto debe decirse de la relación $A = B$. Se da entre dos eventos, A, B, cuando la verificación del primero implica la del segundo, y la del segundo implica la del primero. O, lo que equivale a esto mismo, cuando contienen exactamente los mismos puntos.

3.7 Frecuencia Relativa y Probabilidad

Se le llama **frecuencia absoluta** de un evento A al número de veces que se verifica. Denotamos este número así: $n(A)$, y lo leemos “ene de A”. (Obsérvese que $n(A)$ no es el número de puntos que contiene A. A este último se lo denota $M(A)$).

Si un experimento se realiza N veces, y en esas N veces un evento A se ha verificado $n(A)$ veces, se le llama **frecuencia relativa**, al número $\frac{n(A)}{N}$. Es decir, el número de veces que se verifica un evento A sobre el número de veces que habría podido verificarse.

El concepto de frecuencia relativa es muy popular en la vida cotidiana. Cuando preguntamos, por ejemplo, por las partidas ganadas de un equipo, no nos conformamos con saber cuántas veces ha ganado; queremos saber, también, cuántas veces ha jugado, para ver si ha ganado la mayor o la menor parte de los juegos. Es decir, queremos saber la frecuencia relativa de su triunfo.

Es obvio que el número de veces que se verifica un evento A nunca puede ser un número negativo. Lo menos que puede ser es 0. De igual modo, nunca puede ser un número mayor que el de las veces que se ha realizado el experimento. Es decir, que para cualquier evento A:

$$0 \leq n(A) \leq N$$

Y en consecuencia:

$$0 \leq \frac{n(A)}{N} \leq 1$$

La probabilidad de un evento A es un número ideal al que se aproxima la frecuencia relativa de ese evento conforme se hace mayor el número de veces que se realiza el experimento. A este número se lo denota $P(A)$, y se lee: “pe de A”) Usaremos como valor de probabilidad de un evento el de su frecuencia relativa.

3.8 Ejercicio

1. En una bolsa hay tres monedas, una de 5, otra de 10 y otra de 25 centavos. Determine un espacio para cada uno de los siguientes experimentos:

- Sacar una moneda.
- Sacar dos monedas.
- Sacar dos monedas, pero una después de la otra.
- Sacar dos monedas, una después de la otra, pero volviendo a meter en la bolsa la primera moneda antes de sacar la segunda.

2. Determine un espacio adecuado para los siguientes experimentos:

- Tirar dos monedas.
- Tirar tres monedas.
- Tirar una moneda y un dado.
- Tirar dos dados.
- Tirar una moneda con dos sellos.
- Tirar un dado, dos de cuyos lados están marcados con un solo punto.
- Examinar un tubo de radio que contiene sólo tres piezas: un filamento, una placa y un resorte, cada uno de los cuales puede estar dañado.

3. Se ha tirado una moneda 60 veces. La frecuencia relativa de que salga cara es $\frac{5}{12}$. ¿Cuántas veces ha salido cara?

4. Supóngase que se lleva a cabo el experimento de pesar a 10 muchachas, obteniéndose los siguientes resultados: 105, 135, 80, 117, 109, 120, 99, 105, 117. Si el evento A consiste en que el peso sea menos de 120,

- $N =$
- $n(A) =$
- $\frac{n(A)}{N} =$

5. Se ha tirado un dado 10 veces con los siguientes resultados: 6, 1, 1, 2, 5, 3, 5, 1, 2, 4. Si A es el evento de salir un número par, y B el de salir un número mayor que 4:

- $n(A) =$
- $n(B) =$
- $n(A \cup B) =$
- $n(A \cap B) =$

6. Se ha tirado un dado 10 veces con los siguientes resultados: 2, 4, 2, 3, 1, 6, 5, 5, 1, 4. Si A es el evento de que salga un número impar, y B el de que salga un número menor que 4:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } n(A) = & \text{c) } n(A \cup B) = \\ \text{b) } n(B) = & \text{d) } n(A \cap B) = \end{array}$$

7. Un experimento se hizo 50 veces, y la frecuencia relativa de un evento A fue 1. ¿Cuántas veces se verificó el evento A?

Respuestas

1. a) $\{ 5,10,25 \}$
 b) $\{ 15,30,35 \}$
 c) $\{ (5,10), (5,25), (10,5), (10,25), (25,5), (25,10) \}$

Repárese en que los puntos son pares ordenados para registrar la diferencia entre, por ejemplo, el resultado de sacar primero una moneda de 5 y después una de 10, y el de sacar primero la de 10 y luego la de 5.

- d) $\{ (5,5), (5,10), (5,25), (10,5), (10,10), (10,25), (25,5), (25,10), (25,25) \}$
2. a) $\{ (C,C), (C,S), (S,C), (S,S) \}$ Aquí "C" abrevia la palabra "cara" y "S", "sello".
 b) $\{ (C,C,C), (C,C,S), (C,S,C), (C,S,S), (S,C,C), (S,C,S), (S,S,C), (S,S,S) \}$

Esta forma, en columna de expresar el espacio, mecaniza, y en consecuencia facilita, los casos como éste. También se podría poner como un árbol, pues son muestras con reposición.

- c) $\{ (C,1), (C,2), \dots, (C,6), (S,1), (S,2), \dots, (S,6) \}$
- d) $\begin{array}{lll} (1,1), & (3,1), & (5,1), \\ (1,2), & (3,2), & (5,2), \\ (1,3), & (3,3), & (5,3), \\ (1,4), & (3,4), & (5,4), \\ (1,5), & (3,5), & (5,5), \\ (1,6), & (3,6), & (5,6), \\ (2,1), & (4,1), & (6,1), \\ (2,2), & (4,2), & (6,2), \\ (2,3), & (4,3), & (6,3), \\ (2,4), & (4,4), & (6,4), \\ (2,5), & (4,5), & (6,5), \\ (2,6), & (4,6), & (6,6) \end{array} \}$

- e) $\{5\}$
 f) $\{1,2,3,4,5\}$
 g) $\left\{ \begin{array}{l} (f, p, r), \\ (f, p, r'), \\ (f, p', r), \\ (f, p', r'), \\ (f', p, r), \\ (f', p, r'), \\ (f', p', r'), \\ (f', p', r), \end{array} \right\}$

Donde "f" es filamento en buen estado, "f'", filamento dañado. Etc...

3.- 25

4.- a) 10; b) 7; c) $\frac{7}{10}$

5.- a) 4; b) 3; c) 6; d) 1

6.- a) 5; b) 5; c) 7; d) 3

7.- 50

3.9 Axiomas

La teoría de la probabilidad computa la de cualquier evento, pero debe contar con la de los puntos. Y la de éstos se la computa o bien experimentalmente, mediante un promedio de su frecuencia relativa, o bien por hipótesis.

Por definición, la probabilidad de un evento A cualquiera es la suma de las probabilidades de los puntos que contiene, (de los eventos unitarios subeventos suyos). Es decir:

$$A = \{r_1\} \cup \{r_2\} \cup \dots \cup \{r_s\} \Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^s P(\{r_i\})$$

Como axiomas o proposiciones fundamentales pueden tomarse estos tres:

A-1 $A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

A-2 $0 \leq P(A) \leq 1$

A-3 $\sum_{i=1}^n P(\{r_i\}) = 1$ Donde n es el tamaño del espacio.

El primer axioma presenta la probabilidad como una función aditiva.

La exigencia del segundo axioma es perfectamente obvia desde la

interpretación estadística, como frecuencia relativa, de la probabilidad. No es del todo independiente. Bastaría afirmar que la probabilidad de cualquier evento A es mayor o igual a a, porque se puede demostrar que es menor o igual a 1.

El tercer axioma, que también es obvio desde la interpretación estadística de la probabilidad, afirma que la suma de las probabilidades de los puntos debe ser 1.

3.10 Algunos Teoremas

Los teoremas deducibles del primer axioma, y que han aparecido ya en su forma más general para cualquier función aditiva, son legítimos en su interpretación de probabilidad:

$$T-1 P(\phi) = 0$$

T-2 Si A, B y C son disjuntos dos a dos, entonces

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$T-3 P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$T-4 P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

De la definición se deriva inmediatamente el teorema 5:

$$T-5 A \cap B = \{r_1\} \cup \{r_2\} \cup \dots \cup \{r_t\} \Rightarrow P(A \cap B) = \sum_{i=1}^t P(\{r_i\})$$

De la definición y del axioma tercero se derivan inmediatamente la segunda parte del axioma segundo y el teorema 6:

$$T-6 P(E) = 1$$

$$T-7 P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Demostración:

$$(1) P(E) = 1$$

[T-6]

$$(2) P(A \cup \bar{A}) = 1$$

[Complemento]

$$(3) A \cap \bar{A} = \phi$$

[Complemento]

$$(4) P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

[A-1, (3)]

$$(5) 1 = P(A) + P(\bar{A})$$

[(2), (4)]

$$(6) P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

La aplicación de este teorema es muy conveniente en los casos, harto frecuentes, en donde es más fácil computar la probabilidad del evento complementario que la del se busca.

Otro teorema que conviene registrar es el siguiente:

$$T-8 \quad A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

Demostración:

- (1) $A \subset B$ [Hipótesis]
- (2) $A \cup B = B$ [Es equivalente a (1)]
- (3) $B = (A \cup B) \cap E$ [Identidad]
- (4) $B = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A})$ [Complemento]
- (5) $B = A \cup (B \cap \bar{A})$ [Distribución]
- (6) $P(B) = P[A \cup (B \cap \bar{A})]$
- (7) $A \cap (B \cap \bar{A}) = \phi$
- (8) $P(B) = P(A) + P(B \cap \bar{A})$ [A-1, (7), (6)].
- (9) $P(A) \leq P(B)$ [$P(B \cap \bar{A}) \geq 0$, por A-2]

Del Teorema 8 y de los ya aparecidos: $A \cap B \subset A$, $A \subset A \cup B$. Se derivan inmediatamente los teoremas 9 y 10:

$$T-9 \quad P(A \cap B) \leq P(A)$$

$$T-10 \quad P(A) \leq P(A \cup B)$$

3.11 Aplicaciones

Se le llama **distribución de probabilidad sobre un espacio** a la asignación de un número (real) como valor de probabilidad a cada punto del espacio. Esta asignación está sujeta sólo a las condiciones que los axiomas estipulan. En el ejemplo que sigue, al igual que en los ejercicios, (a menos que se manifieste explícitamente lo contrario), se supondrá que la frecuencia relativa coincide con la probabilidad apriorística. (Esto con el propósito de exonerarnos del trabajo de hacer los experimentos).

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación de algunos de los teoremas considerados:

En una urna hay 4 bolitas, 2 blancas y 2 negras. Para el experimento de sacar 2 bolitas, (una con cada mano), determine el espacio, distribuya la probabilidad y encuentre la de los siguientes eventos:

- a) Que las dos bolitas sean del mismo color.
- b) Que sean de diferente color.
- c) Que ninguna de ambas bolitas sea negra.
- d) Que la primera bolita (la sacada con la mano izquierda, por ejemplo) sea blanca o que las dos sean negras.
- e) Que sean de diferente color o que la primera sea blanca.
- f) Que la primera sea blanca y la segunda negra.
- g) Que por lo menos una sea blanca.
- h) Que a lo sumo una sea negra.
- i) Que por lo menos una sea blanca o que a lo sumo una sea negra.

El primer paso que damos es determinar el espacio. Considerando numeradas las bolitas, para poder distinguirlas aun cuando sean del mismo color, es obvio que el espacio que se requiere es éste:

$$E = \{ (B_1, B_2), (B_1, N_1), (B_1, N_2), (B_2, B_1), (B_2, N_1), (B_2, N_2), (N_1, B_1), (N_1, B_2), (N_1, N_2), (N_2, B_1), (N_2, B_2), (N_2, N_1) \}$$

Abreviando cada punto por r_i , donde i corre del 1 al 12, $P(\{r_i\}) = \frac{1}{12}$. Esta información la habríamos podido obtener sin necesidad de determinar el espacio, aplicando la fórmula para muestras sin reposición de cuatro elementos tomados de dos en dos.

a) Los puntos que verifican el evento de que ambas bolitas sean del mismo color son r_1, r_4, r_9, r_{12} . En consecuencia, la probabilidad de este evento, según la definición es $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

b) Como este evento es complementario del anterior, en vez de sumar las probabilidades de los puntos que contiene, resulta más fácil aplicar el teorema 7: $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

c) Se trata del evento $\{r_1, r_4\}$. En consecuencia, $P(\{r_1, r_4\}) = \frac{1}{6}$

d) Si A es el evento de que la primera bolita sea blanca, $\{A = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}\}$. Si B es el evento de que ambas sean negras, $\{B = \{r_9, r_{12}\}\}$. En consecuencia, $A \cup B = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_9, r_{12}\}$ es el evento cuya probabilidad se busca y que es $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. Repárese en que con la información de la probabilidad de ambos eventos y de que su intersección es nula, se habría podido aplicar el axioma primero.

e) Se busca la probabilidad del evento $A \cup B$, donde A es el evento de que sean de diferente color y B el de que la primera bolita sea blanca. En vez

de determinar los puntos de este evento, como ya conocemos por (b) que $P(A) = \frac{2}{3}$, y por (d) que $P(B) = \frac{1}{2}$, resulta práctico determinar $A \cap B$ y aplicar el teorema 3. $A \cap B = \{r_2, r_3, r_5, r_6\}$. En consecuencia $P(A \cap B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Aplicando el teorema 3: $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

f) Se trata del evento $\{r_2, r_3, r_5, r_6\}$, cuyo valor de probabilidad es $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

g) Es el evento complementario del que las dos sean negras. En consecuencia: $1 - \frac{2}{12} = \frac{5}{6}$

h) Se trata igualmente del evento complementario del que ambas sean negras. $1 - \frac{2}{12} = \frac{5}{6}$

i) Aprovechándose de los resultados de (g) y de (h), y aplicando el teorema 3: $\frac{5}{6} + \frac{5}{6} - \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$. Porque en este caso $A = B$, y en consecuencia $A \cap B = A$. Como $P(A) = \frac{5}{6}$, ése será igualmente el valor de la probabilidad de $A \cap B$.

3.12 Ejercicios

1. Dado un experimento con el espacio $E = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ con la siguiente distribución: $P(\{r_1\}) = 0.2$; $P(\{r_2\}) = 0.4$; $P(\{r_3\}) = 0.1$; ¿cuál será la probabilidad del punto r_4 ?

2. Si un alumno tiene 0.9 de probabilidad de aprobar un examen, y 0.6 de sacar una nota inferior a B, ¿qué probabilidad tiene de sacar C o D?

3. Una expendedora automática de cigarrillos está dañada. La probabilidad de que no salgan los cigarrillos ni regrese el dinero es $\frac{1}{2}$. La probabilidad de que salgan o los cigarrillos o el dinero, pero no ambos, es $\frac{1}{3}$. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan los cigarrillos y que regrese el dinero conjuntamente?

4. Se tiran tres monedas. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan por lo menos dos caras?

5. Se sacan dos bolitas de una urna que contiene dos rojas y una blanca. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una blanca?

6. Se tira un par de dados.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dos números que salen

sea 4?

- b) ¿Cuál la de que sea menor que 4?
- c) ¿Cuál la de que sea 7?
- d) ¿Cuál la de que sea 11?
- e) ¿Cuál la de que sea 2?
- f) ¿Cuál la de que sea 3?
- g) ¿Cuál la de que los dos números sean iguales?
- h) ¿Cuál la de que la suma de ambos sea mayor que 8?

7. Se tiran dos monedas. ¿Cuál es la probabilidad de que salga una cara y un sello?

8. Si (erróneamente) no se distingue, en el problema anterior, entre los puntos (C,S) y (S,C), ¿cuál es la probabilidad de que salga una cara y un sello?

9. Compruebe el error que se comenta en el problema anterior tirando 50 veces dos monedas y anotando las veces que resultan dos caras, dos sellos y una cara y un sello.

10. Se tiran cuatro monedas.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que salgan 4 caras?
- b) ¿Cuál la de que salgan dos caras exactamente?
- c) ¿Cuál la de que salgan por lo menos dos caras?
- d) ¿Cuál la de que salgan a lo sumo dos caras?
- e) ¿Cuál la de que salga una cara exactamente?

11. Una urna contiene algunas bolitas rojas, algunas blancas y algunas azules. (No se da ninguna información con respecto al número de ellas). La probabilidad se la distribuye sobre el espacio $E = \{r_1, r_2, \dots, r_9\}$ así:

$$P(\{r_1\}) = 0.2; P(\{r_2\}) = 0.2; P(\{r_3\}) = 0.1; P(\{r_4\}) = 0.2;$$
$$P(\{r_5\}) = 0.06; P(\{r_6\}) = 0.07; P(\{r_7\}) = 0.1; P(\{r_8\}) = 0.07;$$
$$P(\{r_9\}) = 0$$

Donde r_1 corresponde al punto (R,R)

" r_2 " " " (R,B)

" r_3 " " " (R,A)

" r_4 " " " (B,R)

" r_5 " " " (B,B)

" r_6 " " " (B,A)

" r_7 " " " (A,R)

- ” r_8 ” ” ” (A,B)
 ” r_9 ” ” ” (A,A)

Como se ve, el experimento consiste en sacar dos bolitas, una después de la otra.

- ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos una bolita sea blanca?
- ¿Cuál la de que exactamente una sea blanca?
- ¿Cuál la de que la primera sea blanca?
- ¿Cuál la de que la segunda sea blanca?
- ¿Cuál la de que ambas sean del mismo color?
- ¿Cuál la de que sean de diferente color?
- ¿Cuál la de que ninguna de las dos sea roja?
- ¿Cuál la de que una sea roja y la otra blanca?

12. En una urna hay dos bolitas rojas y una blanca. Se sacan dos, una después de la otra. ¿Cuál es la probabilidad de que sean de diferente color,

- restituyendo en la urna la primera bolita sacada antes de sacar la otra?
- sin restitución?

13. Un dado (tramposo) está cargado de modo que la probabilidad de que salga uno de sus lados es proporcional al número de puntos del lado. Por ejemplo, la probabilidad de que salga 2 es dos veces mayor que la de que salga 1.

- Distribuya la probabilidad sobre el espacio.
- ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número impar?

14.- Dados $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, ¿cuál es la probabilidad de $A \cup B$?

15. Un Estudiante está preocupado por sus exámenes de álgebra y de botánica. Estima que su probabilidad de aprobar álgebra es 0.4; la de aprobar por lo menos una de las dos asignaturas es 0.6; pero la de aprobar las dos es 0.1 ¿Qué probabilidad tiene de aprobar botánica?

16. De un grupo de 500 estudiantes universitarios se sabe que 300 leen el francés, 200 el alemán, 50 el ruso, 20 el francés y el ruso, 30 el alemán y el ruso, 20 el alemán y el francés, 10 los tres idiomas. Si se toma al azar a un estudiante del grupo,

- ¿qué probabilidad hay de que lea dos (y únicamente dos) de los idiomas considerados?
- ¿Que probabilidad hay de que lea por lo menos uno de los idiomas?

Respuestas 1.- 0.3
 2.- 0.5

3. El espacio de este experimento es $\{(C,D), (C,D'), (C',D), (C',D')\}$, donde C y D significan, respectivamente, salen cigarrillos, sale el dinero, y C', D', no salen los cigarrillos, no sale el dinero. Como la probabilidad del último punto es, de acuerdo con la información dada, $\frac{1}{2}$, y la de los otros dos puntos anteriores, $\frac{1}{3}$ entre ambas, la probabilidad del primer punto es $\frac{1}{6}$.

4. El espacio de este experimento, que sale en la página 62, tiene 8 puntos, cada uno de los cuales, en consecuencia, debe tener como valor de probabilidad $\frac{1}{8}$. Los puntos que favorecen al evento en cuestión son el 1°, 2°, 3°, y 5°. Por tanto, la probabilidad de este evento es $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

5. Numerando las bolitas, el espacio de este experimento es:

$$\left\{ \begin{array}{l} (R_1, R_2), \\ (R_1, B), \\ (R_2, R_1), \\ (R_2, B), \\ (B, R_1), \\ (B, R_2) \end{array} \right\}$$

Los puntos que favorecen al evento en cuestión son el 2°, 4°, 5° y 6°. Como cada punto tiene $\frac{1}{6}$ de valor de probabilidad, la respuesta es $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

6. (Con el espacio que sale en la página 61 a la vista)

a) $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$	e) $\frac{1}{36}$
b) $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$	f) $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
c) $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	g) $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
d) $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$	h) $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

7. (Con el espacio que sale en la página 60 a la vista) $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

8.- $\frac{1}{3}$

10.- El espacio es:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (C, C, C, C), & (S, C, C, C), \\ (C, C, C, S), & (S, C, C, S), \\ (C, C, S, C), & (S, C, S, C), \\ (C, C, S, S), & (S, C, S, S), \\ (C, S, C, C), & (S, S, C, C), \\ (C, S, C, S), & (S, S, C, S), \\ (C, S, S, C), & (S, S, S, C), \\ (C, S, S, S), & (S, S, S, S) \end{array} \right\}$$

a) $\frac{1}{16}$

d) $\frac{11}{16}$

b) $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

e) $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

c) $\frac{11}{16}$

11.- a) 0.6

e) 0.26

b) 0.54

f) 0.74

c) 0.33

g) 0.2

d) 0.33

h) 0.4

12.- a) El espacio es:

$$\left\{ (R_1, R_1), (R_1, R_2), (R_1, B), (R_2, R_1), (R_2, R_2), (R_2, B), (B, R_1), (B, R_2), (B, B) \right\}$$

En consecuencia, la respuesta es $\frac{4}{9}$

b) Para este otro experimento, en cambio, el espacio es:

$$\left\{ (R_1, R_2), (R_1, B), (R_2, R_1), (R_2, B), (B, R_1), (B, R_2) \right\}$$

La respuesta es $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

13.- a) $P(\{r_2\}) = 2P(\{r_1\})$

$P(\{r_3\}) = 3P(\{r_1\})$

” ” ”
” ” ”

$$P(\{r_6\}) = 6P(\{r_1\})$$

$$P(\{r_1\}) + 2P(\{r_1\}) + 3P(\{r_1\}) + 4P(\{r_1\}) + 5P(\{r_1\}) + 6P(\{r_1\}) = 1$$

Factorizando:

$$P(\{r_1\})(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21P(\{r_1\}) = 1$$

$$\circ \circ P(\{r_1\}) = \frac{1}{21}$$

$$P(\{r_2\}) = \frac{2}{21}$$

$$P(\{r_3\}) = \frac{3}{21}$$

$$P(\{r_4\}) = \frac{4}{21}$$

$$P(\{r_5\}) = \frac{5}{21}$$

$$P(\{r_6\}) = \frac{6}{21}$$

$$b) \frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21} = \frac{3}{7}$$

$$14.- \frac{11}{12}$$

$$15.- 0.3$$

$$16.- a) \frac{1}{10}, b) \frac{49}{50}$$

3.13 Espacios Producto

Compárense estos dos experimentos: el de tirar un dado y el de tirar una moneda y un dado. El espacio del primero es $\{1,2,3,4,5,6\}$. El del segundo, $\{(C,1), (C,2), (C,3), (C,4), (C,5), (C,6), (S,1), (S,2), (S,3), (S,4), (S,5), (S,6)\}$.

El primero de estos experimentos es irreductible, en el sentido de que no se le puede formar a base de otros experimentos. El segundo, en cambio, puede ser reducido a los experimentos de tirar una moneda y de tirar un

dato. Diremos que un experimento irreductible a otros tiene un espacio unidimensional, y llamaremos multidimensional al espacio que puede formarse a base de otros espacios. Al espacio multidimensional le llamaremos más frecuentemente espacio producto, porque es el producto (cartesiano) de los espacios con los cuales se forma. Por ejemplo, el experimento de tirar tres monedas (o una moneda tres veces), tiene un espacio producto (tridimensional) cuyos puntos son, entre otros, (C,C,S), (C,S,C), etc...

Se ve claro cómo los puntos de un espacio multidimensional o producto son conjuntos ordenados que tienen como elementos un punto de cada espacio que interviene en su formación.

Ya se indicó anteriormente que el número de puntos de un conjunto producto era el producto aritmético del tamaño de los conjuntos factores, y que en consecuencia una forma práctica de averiguar el número de puntos de un conjunto producto era multiplicando entre sí el número de formas en que puede llenarse cada puesto de la nupla, porque este número corresponde al tamaño del conjunto factor cuyos elementos ocupan ese puesto.

Muchas veces un experimento está formado por la repetición de un mismo experimento. En estos casos el espacio producto no es más que el espacio del experimento que se repite elevado a esa potencia que corresponde al número de veces que se realiza el experimento. Y el tamaño de este espacio producto es el tamaño del espacio del experimento que se repite elevado a esa potencia que corresponde al número de veces que se realiza. Por ejemplo, el experimento de sacar cuatro cartas de un mazo, restituyendo cada carta antes de sacar la próxima, tiene un espacio cuatridimensional con 54^4 puntos.

Pero sucede también muchas veces que, aunque a primera vista lo parece, no hay tal repetición. Así, por ejemplo, en el experimento de sacar cuatro cartas de un mazo sin irlas restituyendo. También aquí se trata de un espacio cuatridimensional, como el del ejemplo anterior, pero los cuatro espacios factores de que está formado tienen diferente medida. El primero tiene 52 puntos, el segundo 51, el tercero 50 y 49 el cuarto, porque cada vez hay una carta menos. En consecuencia la medida de este espacio producto es $50 \times 51 \times 50 \times 49$ Debe verse claro que los puntos del primer experimento son muestras con reposición, en tanto que los de este segundo, muestras sin reposición.

Este principio del producto cartesiano tiene mucha aplicación en aquellos problemas de probabilidad en donde interesa saber la medida del espacio, es decir, cuando cada punto tiene igual valor de probabilidad, $\frac{1}{M(E)}$

3.14 Distribución no-uniforme de la Probabilidad sobre Espacios Producto

La sección anterior estaba dedicada al tratamiento de los casos de

espacios producto cuyos puntos tengan todos el mismo valor de probabilidad. Es decir, los casos en donde la probabilidad está uniformemente distribuida.

Como se mostrará enseguida, la probabilidad de un punto de un espacio producto, en general, es igual al producto de la probabilidad de los puntos que lo constituyen. Esto es igualmente válido para los casos de los espacios con probabilidad uniformemente distribuida como para los de los espacios en donde la probabilidad no ha sido uniformemente distribuida.

Considérense dos experimentos con espacios I e J respectivamente, y los puntos $r_i \in I, r_j \in J$. Si el experimento de espacio I se realizó N veces, y el otro, M veces, las probabilidades de estos dos puntos son, de acuerdo con la definición de probabilidad como frecuencia relativa, $\frac{n(\{r_i\})}{N}$, y $\frac{n(\{r_j\})}{M}$ respectivamente. Supóngase ahora un experimento formado por esos dos y cuyo espacio es I x J. Como cada vez que se da el punto r_i o r_j son diferentes, (se han dado en momentos diferentes), el número de pares $(r_i, r_j) \in I \times J$ es $n(\{r_i\}) \times n(\{r_j\})$, de acuerdo con el principio del producto cartesiano; y el número de veces que puede aparecer este par, de acuerdo también con el mismo principio, es N x M. Luego la probabilidad del punto

$$(r_i, r_j) \text{ es } \frac{n(\{r_i, r_j\}) \times n(\{r_j\})}{N \times M} = \frac{n(\{r_i\})}{N} \times \frac{n(\{r_j\})}{M} = P(\{r_i\}) \times P(\{r_j\})$$

Falta comprobar ahora si esta forma de distribuir la probabilidad satisface el axioma tercero, donde se estipula que la suma de las probabilidades de todos los puntos debe ser igual a 1.

La representación gráfica del espacio I x J, donde $M(I) = p$ y $M(J) = q$, es:

r'_q	(r_1, r'_q)	$(r_2, r'_q) \dots$	(r_p, r'_q)
:	:	:	:
:	:	:	:
:	:	:	:
r'_2	(r_1, r'_2)	$(r_2, r'_2) \dots$	(r_p, r'_2)
r'_1	(r_1, r'_1)	$(r_2, r'_1) \dots$	(r_p, r'_1)
	r_1	$r_2 \dots$	r_p

Resulta, con la distribución que comentamos, que para cualquier r_i ,

$$\sum_{j=1}^q P(\{(r_i, r_j)\}) = \sum_{j=1}^q P(\{r_i\}) \times P(\{r_j\})$$

Y esta expresión, factorizándola, es igual a:

$$P(\{r_i\}) \times \sum_{j=1}^q P(\{r_j\})$$

Pero $\sum_{j=1}^q P(\{r_j\}) = 1$, porque es la suma de las probabilidades de los puntos del espacio J . En consecuencia:

$$\sum_{j=1}^q P(\{(r_i, r_j)\}) = P(\{r_i\})$$

Y como $\sum_{i=1}^p P(\{r_i\}) = 1$, la suma de las probabilidades de todos los puntos del espacio producto es 1, satisfaciéndose así el axioma tercero.

La aplicación del principio:

$$P(\{(r, r', r'', \dots)\}) = P(\{r\}) \times P(\{r'\}) \times P(\{r''\}) \times \dots$$

permite asignar el valor de probabilidad a los puntos de espacio producto sin necesidad de determinar todo el espacio.

Por ejemplo, se sacan 4 cartas de un mazo, (con restitución). ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro sean ases? El único punto que verifica el evento cuya probabilidad se busca es (A,A,A,A). La probabilidad del primer punto es $\frac{4}{52}$. Igualmente la de los otros, pues la carta se ha restituido al mazo después de cada extracción. En consecuencia, la probabilidad del punto en cuestión es $(\frac{4}{52})^4$. Por supuesto, se llegaría al mismo resultado

mediante la fórmula de muestras con reposición.

Otro ejemplo: Una urna contiene 12 bolitas, 7 negras y 5 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolitas rojas, a) restituyendo a la urna la primera bolita antes de sacar la segunda, y b) sin restitución? En ambos casos se pide la probabilidad del punto (R,R). Considérese el primer caso. La

probabilidad del primer punto R del par (R,R) es $\frac{5}{12}$. Como la bolita que se sacó y que se supone roja ha sido restituida a la urna, la del segundo punto es igualmente $\frac{5}{12}$. En consecuencia, la probabilidad del punto par es $\left(\frac{5}{12}\right)^2$. Considérese ahora el segundo caso, en donde también se pide la probabilidad del punto par (R,R). La de su primer componente es igualmente $\frac{5}{12}$, pero como la bolita roja que se supone extraída no ha sido restituida, la del segundo componente es $\frac{4}{11}$. En este caso la probabilidad del punto par es $\frac{5}{12} \times \frac{4}{11}$. Mediante las fórmulas de muestras con y sin reposición se llega, por supuesto, a los mismos resultados.

Un último ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de sacar por lo menos un 2 (u otro número cualquiera) en cuatro tiradas sucesivas de un dado? Para resolver este problema acudimos al teorema 7: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. El evento complementario de que salga por lo menos un 2 en las cuatro tiradas, es el de que no salga ninguno. Ahora bien, la probabilidad de que en la primera tirada no salga 2 es $\frac{5}{6}$, y en consecuencia, la que no salga ningún 2 en las cuatro tiradas, es, de acuerdo con lo anterior $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Aplicando el teorema, el resultado es

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \text{ O sea, un poco mayor que } \frac{1}{2}$$

En todos estos ejemplos se ha indicado que las fórmulas del análisis combinatorio pueden también aplicarse para resolverlos, en vez del principio de distribución de probabilidad sobre espacios producto, que sin duda es más práctico. Consideremos ahora otro ejemplo para resolverlo de ambas maneras:

Una urna contiene 5 bolitas rojas y 4 blancas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar, sin reposición, 3 bolitas rojas? Con el método que venimos ilustrando, la probabilidad del punto (R,R,R) la computábamos $\frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{5}{42}$

Pero también puede resolverse el problema así: El número de puntos que tiene el espacio que consideramos es $9^M 3 = \frac{9!}{(9-3)!} = 504$. De estos 504 puntos, hay $5^M 3$ en donde las tres bolitas son rojas, es decir $\frac{5!}{(5-3)!} = 60$. En consecuencia, el resultado es $\frac{60}{504} = \frac{5}{42}$.

Y también podría resolverse aplicando la fórmula de combinaciones. Considerando ahora el espacio cuyos puntos son combinaciones con tres elementos de una población de 9, sabemos que tiene $\binom{9}{3} = \frac{9!}{(9-3)! 3!} =$

84 puntos. En este caso, los puntos son conjuntos y no nuplas. De estos 84 puntos hay $\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = 10$ que verifican el evento en cuestión. En consecuencia, su probabilidad es, $\frac{10}{84} = \frac{5}{42}$

3.15 La Paradoja de Monte Carlo

La paradoja de Monte Carlo, el casino célebre, afirma que por mucho que se repita un resultado cualquiera, eso no afecta a su valor de probabilidad cuando el mismo experimento se vuelve a realizar. Es de opinión popular, seguramente radicada en prejuicios muy hondos, que, por ejemplo, después de tirar una moneda, digamos tres veces, obteniendo sello en cada caso, hay mejores probabilidades de que a la cuarta tirada salga cara; porque razonamos que sería muy poco probable (para ser exactos $(\frac{1}{2})^4 = 0.06$, que es bien poco) que saliera cuatro veces seguidas sello. Igualmente, es notorio el hecho de que nadie compra un número de lotería que ha jugado la última vez, porque, razonamos, sería el colmo que se repitiera.

Este raciocinio popular es ilegítimo, contradictorio, porque la poca probabilidad que tiene de repetirse un resultado la hemos obtenido multiplicando entre sí la **misma** probabilidad un número determinado de veces. Es decir que hemos supuesto que el valor de probabilidad del resultado es la misma en cada caso. Únicamente si el número de veces que pudiéramos hacer el experimento, tirar una moneda por ejemplo, fuese finito, tendría sentido pensar que los resultados se van agotando, mejorando así las probabilidades de los otros resultados. Teóricamente, sin embargo, un experimento **ideal** puede repetirse indefinidamente. El modelo matemático cuenta, a diferencia de los seres humanos, de un tiempo infinito para balancear los resultados de un experimento. Aun si saliera un millón de veces seguidas sello, teóricamente no hay ninguna razón para pensar que esa rareza va a influir en la próxima tirada. Claro está que si algo semejante a esto pasara, habría que pensar en alguna irregularidad de la moneda.

Psicológicamente, pues, el vicio del raciocinio que nos hace esperar un resultado cuando ya tiene tiempo de no venir, y de no esperararlo cuando acaba recientemente de aparecer, se funda en la finitud con la que el hombre está habituado a vivir y pensar las cosas de su vida, y en el carácter material, gustable, de todo aquello con lo que negocia.

3.16 El Problema del Cumpleaños

Un problema muy interesante por lo curioso del resultado, y que se resuelve con la fórmula de muestras, es el siguiente: ¿Cuál es la probabilidad

de que en un conjunto con r personas haya por lo menos dos de ellas que tengan el mismo día de cumpleaños?

Descartando los años bisiestos y en consecuencia la posibilidad de que alguien nazca el 29 de febrero, el espacio de este experimento tiene como puntos muestrales con r componentes, de las cuales, según el principio del producto cartesiano, hay 365^r .

Si A es el evento en cuestión, \bar{A} , su complementario, es el evento de que en el grupo de las r personas nadie tenga el mismo día de cumpleaños. (La negación de "por lo menos un" es "ninguno"). El número de puntos que verifican el evento \bar{A} es $\frac{365!}{(365-r)!}$. De donde se obtiene que

$$P(\bar{A}) = \frac{365!}{365^r (365-r)!}$$

En este caso es preferible, sin embargo, usar la fórmula menos compacta para las muestras: ${}_n P_3 = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$ Usándola, se obtiene como valor de probabilidad para el evento de que nadie comparta cumpleaños:

$$P(\bar{A}) = \frac{365 \times 364 \times 363 \times \dots \times 365 - r + 1}{365^r} = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \dots \times \frac{365 - r + 1}{365}$$

En consecuencia, la probabilidad de que en un grupo de r personas haya por lo menos dos que cumplan años el mismo día es:

$$P(A) = 1 - \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \dots \times \frac{365 - r + 1}{365}$$

La tabla de abajo, donde r corre de 1 a 60, indica que ya en un grupo de 23 personas hay un poco más del 50% de probabilidad de que por lo menos un par de personas tengan el mismo día de cumpleaños, que es un resultado verdaderamente notable.

r	$P(A)$	r	$P(A)$	r	$P(A)$	r	$P(A)$
1	0.000	16	0.283	31	0.730	46	0.948
2	0.002	17	0.315	32	0.753	47	0.954
3	0.008	18	0.346	33	0.774	48	0.960
4	0.016	19	0.379	34	0.795	49	0.965
5	0.027	20	0.411	35	0.814	50	0.970

6	0.040	21	0.443	36	0.832	51	0.974
7	0.056	22	0.475	37	0.848	52	0.978
8	0.074	23	0.507	38	0.864	53	0.981
9	0.094	24	0.538	39	0.878	54	0.983
10	0.116	25	0.568	40	0.891	55	0.986
11	0.141	26	0.598	41	0.903	56	0.988
12	0.167	27	0.626	42	0.914	57	0.990
13	0.194	28	0.654	43	0.923	58	0.991
14	0.223	29	0.680	44	0.932	59	0.992
15	0.252	30	0.706	45	0.940	60	0.994

3.17 Ejercicio

1. Se tira una moneda 4 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro veces salga cara?

2. Se tira un par de dados dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos veces salga 12?

3. a) Se dan cinco golpes al azar sobre las teclas de una máquina de escribir. (Se supone que la máquina tiene 50 teclas). ¿Cuál es la probabilidad de escribir la palabra "avión"? b) Cuál la de escribir la palabra "superficialísimamente", golpeando 21 veces el teclado?

4. En una urna hay 6 bolitas numeradas del 1 al 6. Se sacan dos bolitas. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de ambas sea 3,
a) restituyendo la primera bolita antes de sacar la segunda?
b) sin restitución?

5. Se sacan tres cartas de un mazo. ¿Cuál es la probabilidad de sacar tres tréboles,
a) restituyendo cada carta antes de sacar la próxima?
b) sin restitución?

6. En una urna hay tres bolitas, 2 blancas y 1 negra. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolitas blancas, (sin restitución)?

7. Se sacan dos cartas, sin restitución, de un mazo. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea un as y la segunda un rey?

8. En una urna hay 3 bolitas rojas y 4 negras. En otra urna hay 4 rojas y 5 negras. Se saca una bolita de cada urna. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean rojas?

9. En una urna hay 4 bolitas rojas, 3 negras y 1 verde. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolitas rojas,
a) con restitución?

b) sin restitución?

10. En una urna hay 4 bolitas rojas, 3 verdes y 2 blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que, de tres bolitas sacadas, las dos primeras sean rojas y la tercera blanca,

a) con restitución?

b) sin restitución?

11. En cada una de dos alacenas hay 3 cajas. 5 de las cajas contienen verduras envasadas. La otra caja contiene frutas envasadas: 10 latas de peras, 8 latas de duraznos y 6 latas de ensalada de frutas. Cada lata de ensalada de frutas contiene 300 trozos de frutas, aproximadamente del mismo tamaño, de los cuales tres son cerezas. Si un niño va a una de las alacenas, destapa una de las cajas, abre una lata y come dos trozos de su contenido, ¿cuál es la probabilidad de que esos dos trozos sean dos cerezas?

12. Una urna contiene 27 bolitas blancas y 40 negras. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 4 bolitas negras?

a) con restitución?

b) sin restitución?

13. Una línea telefónica entre dos puntos A y B que se encuentran a una distancia de dos kilómetros, se corta en un punto desconocido. ¿Cuál es la probabilidad de que el lugar afectado no se halle a una distancia mayor de 450 metros del punto A?

14. Un dentista tiene su consultorio en un edificio con 5 entradas, todas igualmente accesibles. Tres pacientes llegan al mismo tiempo a su consultorio. ¿Cuál es la probabilidad de que hallan entrado todos por la misma puerta?

15. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 personas elegidas al azar tengan el mismo día de cumpleaños? (Se descarta el 29 de febrero).

16. Se sacan dos bolitas de una urna que contiene 2 bolitas blancas, 3 negras y 4 verdes. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea blanca y la segunda negra,

a) con restitución?

b) sin restitución?

17. Una urna contiene 5 bolitas rojas, 4 azules y 1 blanca. Se sacan tres bolitas, sin restitución. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos primeras no sean blancas pero que sí lo sea la tercera?

18. En una urna hay tres bolitas blancas y una azul. Se sacan dos bolitas. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color.

a) con restitución?

b) sin restitución?

19. Una urna contiene 4 bolitas rojas, 3 blancas y 2 azules. Se sacan tres bolitas. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea roja, la segunda blanca y la tercera azul,

- a) con restitución
- b) sin restitución?

20. Se sacan tres cartas de un mazo, con restitución. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos primeras no sean ases pero que sí lo sea la tercera?

21. De un mazo se sacan dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea un as y la segunda no lo sea,

- a) con restitución?
- b) sin restitución?

22. Una urna contiene 50 bolitas negras y 20 blancas. Se sacan dos bolitas, sin restitución. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea negra y la segunda blanca?

23. Una urna contiene 10 bolitas negras y 2 blancas. Se saca una bolita después de la otra, sin restitución, hasta que salga una blanca.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el juego termine a la sexta jugada?
- b) ¿Cuál la de que termine antes de la sexta jugada?

24. Una urna contiene 3 bolitas negras y 2 blancas. Dos jugadores sacan, el uno después del otro, una bolita, sin restitución, hasta que uno de ellos saque una blanca y gane.

- a) ¿Qué probabilidades tiene cada jugador de ganar?
- b) En caso de que uno de ellos tenga mejores probabilidades de ganar que el otro, ¿cómo habría que modificar las reglas del juego para que sea equitativo?

25. En una urna A hay 3 bolitas rojas y 4 negras. En otra urna B hay 4 rojas y 5 negras. Se saca una bolita de la urna A y se la mete en la urna B si y sólo si es roja. Entonces se saca una bolita de la urna B. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolitas sean rojas?

26. Una compañía ha determinado que el 80% de sus productos son de buena calidad. Si se compran dos de sus productos,

- a) ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos uno sea de buena calidad?
- b) ¿cuál la de que las dos sean de mala calidad?

27. ¿Cómo distribuiría usted 50 bolitas blancas y 50 negras en dos urnas, de manera que sea máxima la probabilidad de sacar dos bolitas blancas extrayendo una bolita de cada urna?

28. De dos urnas, la primera contiene 1 bolita negra y 2 blancas, y la otra, 2 bolitas negras y 1 blanca. Se saca una bolita de la primera urna y, sin ver su color, se la pasa a la segunda urna. A continuación, se saca una bolita de la segunda urna.

- a) ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?
- b) Y si sacamos una bolita de la segunda urna, y sin verla la metemos en la primera urna, y entonces sacamos una de la primera urna, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?

Respuestas.—

1.— $\frac{1}{16}$

2.— $\frac{1}{6^4}$

3.— a) $\frac{1}{50^5}$; b) $\frac{1}{50^{21}}$

4.— a) $\frac{1}{18}$; b) $\frac{1}{15}$

5.— a) $\left(\frac{13}{52}\right)^3$; b) $\frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{11}{50}$

6.— $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

7.— $\frac{4}{52} \times \frac{4}{51}$

8.— $\frac{3}{7} \times \frac{4}{9}$

9.— $\left(\frac{4}{8}\right)^2 = \frac{1}{4}$; b) $\frac{4}{8} \times \frac{3}{7}$

10.— a) $\frac{4}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{2}{9}$; b) $\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7}$

11.— $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{6}{24} \times \frac{3}{300} \times \frac{2}{229}$

12.— a) $\left(\frac{40}{67}\right)^4$; b) $\frac{40}{67} \times \frac{39}{66} \times \frac{38}{65} \times \frac{37}{64}$

$$13.- \frac{450}{2000}$$

$$14.- \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \text{ El primer paciente no hace más que determinar una de las entradas.}$$

$$15.- \frac{1}{365^2}$$

$$16.- \frac{2}{9} \times \frac{3}{9} ; \text{ b) } \frac{2}{9} \times \frac{3}{8}$$

$$17.- \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8}$$

$$18.- \text{ a) } \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{8} ; \text{ b) } \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{0}{3} = \frac{1}{2} \text{ En este problema ha sido necesario recordar la definición de probabilidad de evento como la suma de las probabilidades de los puntos que lo verifican.}$$

$$19.- \text{ a) } \frac{4}{9} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{9} \text{ b) } \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7}$$

$$20.- \frac{48}{52} \times \frac{48}{52} \times \frac{4}{52}$$

$$21.- \text{ a) } \frac{4}{52} \times \frac{48}{52} ; \text{ b) } \frac{4}{52} \times \frac{48}{51}$$

$$22.- \frac{50}{70} \times \frac{20}{69}$$

23. a) El espacio de este experimento es $\{ B, (N,B), (N,N,B), \dots, (N,N,N,N,N,N,N,N,N,N,B) \}$ El punto que verifica el evento de que la bolita blanca salga a la sexta jugada es $(N.N,N,N,N,B)$, cuyo valor de probabilidad es

$$\frac{10}{12} \times \frac{9}{11} \times \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{6}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{11}$$

$$\text{ b) } \frac{2}{12} + \frac{10}{12} \times \frac{2}{11} + \frac{10}{12} \times \frac{9}{11} \times \frac{2}{10} + \frac{10}{12} \times \frac{9}{11} \times \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} + \\ + \frac{10}{12} \times \frac{9}{11} \times \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{15}{22}$$

24. a) El espacio de este experimento es $\{ B, (N,B), (N,N,B), (N,N,N,B) \}$. El valor de probabilidad de estos puntos es, en el mismo orden: $\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}$. Como el que inicia el juego gana si resulta el primer y tercer punto, su probabilidad de ganar es $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$. En consecuencia, la probabilidad de ganar del otro es $\frac{2}{5}$. O, lo que es lo mismo, la suma de las probabilidades del segundo y quinto punto: $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

b) Para que el juego fuese justo, ambos deberían tener la misma probabilidad de ganar, es decir, $\frac{1}{2}$. Y esto se puede lograr si quien juega en el segundo lugar juega también en tercer lugar, porque entonces su probabilidad de ganar sería $\frac{3}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$

$$25.- \quad \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{14}$$

$$26.- \quad \text{a) } \frac{24}{25} = 0.96 \quad \text{b) } \frac{1}{25} = 0.04$$

27. Distribuyendo equitativamente las bolitas, 25 de cada color en cada urna, la probabilidad de que las dos sean blancas es $\frac{1}{4}$. En cambio, poniendo en una urna 50 negras y 49 blancas, y en la otra urna la blanca restante, la probabilidad de que las dos sean blancas es $\frac{49}{99} \times 1$, que es casi $\frac{1}{2}$.

$$28.- \quad \text{a) } \frac{5}{12} ; \text{ b) } \frac{7}{12}$$

3.18 La Apuesta

Con el propósito de poder tratar ciertos problemas interesantes muy relacionados con los juegos de azar, introducimos el concepto de **esperanza**. Se la define como el **producto del valor de una ganancia que se espera por el de la probabilidad de obtenerla**. Esta definición parece lógica puesto que la esperanza de obtener una ganancia grande pero con pocas probabilidades es equivalente a la de obtener una pequeña ganancia pero con mucha probabilidad. Por otra parte, se le llama **apuesta**, o **inversión**, o **precio de compra**, al valor con el que compramos una esperanza. Decimos que una apuesta es justa o equitativa cuando coincide con el valor de la esperanza.

Por ejemplo, si apostamos 1 balboa a que, tirando una moneda, sale cara, en cuyo caso ganamos 2 balboas, estamos comprando con 1 balboa una esperanza que vale, $\frac{1}{2} \times 2 = 1$. Es, pues, una apuesta justa.

Supóngase ahora que apuesto 4 balboas en las siguientes condiciones: Tirando un dado, si sale un número menor que 3, gano 4 balboas, pero si sale el 6, gano 10 balboas. Aquí la esperanza de ganar con el número menor que 3 es $\frac{2}{6} \times 4 = \frac{4}{3}$. La de ganar con el 6 es $\frac{1}{6} \times 10 = \frac{5}{3}$. La esperanza total, en consecuencia, es $\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3$. Como estoy pagando 4 balboas por ella, que sólo vale 3, se me está robando 1 balboa. Esto quiere decir que aun cuando resultara favorecido bien con la restitución de mis 4 balboas o con los 10, habré perdido 1 balboa.

3.19 Ejercicio

1. ¿Cuál sería la ganancia justa que se merece quien apuesta 1 balboa a que saca 4 caras tirando 4 monedas?

2. Con el "chance" de la Lotería Nacional, que cuesta 20 centavos y que tiene 2 dígitos, puede ganarse uno 11 balboas en el primer premio, 3 balboas en el segundo premio y 2 en el tercero. ¿Qué valor tiene la esperanza que compramos con esos 20 centavos?

3. ¿Cuál es mejor apuesta, apostar 1 contra 3 a que tirando dos monedas salen ambas caras, o apostar 1 contra 14 a que tirando 4 monedas salen todas caras?

4. ¿Cuál es mejor apuesta, apostar 3 contra 6 a que tirando dos monedas salen diferentes, o apostar 3 contra 8 a que las dos salen cara?

5. Una persona está dispuesta a apostar 10 balboas a que, tirando un par de dados, saca 7. ¿Cuánto habría que ofrecerle como ganancia para "robarle" 1 balboa?

6. (Paradoja de San Petersburgo) Una persona está dispuesta a pagarnos 2 balboas si sacamos cara en la primera tirada de una moneda, 4 si la sacamos en la segunda tirada, 8 si la sacamos en la tercera tirada, y en general 2^n si en la enésima tirada. ¿Cuánto habría que pagarle para participar en este juego?

7. Si en el problema anterior, la persona que ofrece el juego puede responder con una cantidad finita de dinero solamente, digamos 2^m , entendiéndose que si a la emésima tirada no ha salido cara, el juego queda anulado, ¿cuánto habría que ofrecerle para participar en su juego?

8. Si en el problema anterior, a la persona que ofrece el juego y que cuenta sólo con 2^m balboas para pagar ganancias, se le permite pagar a lo sumo 2^m balboas, de manera que si sale cara después de la emésima tirada, él sólo paga 2^m balboas, ¿cuánto habría que pagarle ahora para participar en su juego?

9. Hay 10 tarjetas. En cuatro de ellas aparece escrito el número 1. En tres de ellas, el 2. En dos de ellas, el 3 y en una, el 4. Si elegimos al azar una de ellas y se nos paga la cantidad de dinero que corresponde a la cifra en la tarjeta, ¿cuánto debe valer la participación en este juego?

10. Si se modifica el juego anterior, de modo que el participante, después de elegir al azar una tarjeta tiene que adivinar la cifra que aparece en ella, obteniendo esa cantidad de dinero si logra adivinarla, y nada si falla, ¿cuánto vale en este caso la esperanza?

Respuestas

1.- 16 balboas.

2.- 16 centavos.

3. En el primer caso, la esperanza tiene un valor de 75 centavos, en el segundo de 87 centavos. Como se está cobrando 1 balboa por ella, la apuesta menos mala es la segunda.

4. En el primer caso se está comprando una esperanza que vale 3 balboas por 3 balboas justamente. Es, pues, una apuesta justa. En el segundo caso, en cambio, la esperanza, que se vende a 3 balboas, vale sólo 2.

5. La probabilidad de sacar 7 con dos dados es $\frac{1}{6}$. En consecuencia, con 9 balboas sería justo que ganara 54. Esta sería entonces la cantidad que habría que ofrecerle para robarle 1 balboa. No se caiga en el error de pensar que, puesto que con 10 balboas su ganancia justa sería 69 balboas, ofreciéndole 59 estaríamos robándole 1. En este caso, la apuesta justa sería de 9.83 balboas y estaríamos robándole sólo 17 centavos.

6. La esperanza de ganar en este juego, que se supone puede prolongarse indefinidamente, es $\frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{4} \times 4 + \frac{1}{8} \times 8 + \dots + \frac{1}{2^n} \times 2^n + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots$. Es decir, infinito. Si el que ofrece el juego está dispuesto a permitir que se prolongue el juego indefinidamente hasta que salga cara, y además, tiene el suficiente dinero para poder responder ante cualquier pérdida, —tiene que ser una cantidad infinita de dinero—, el precio justo para participar en este juego es infinito.

7. La esperanza, en este caso, vale $\frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{4} \times 4 + \dots + \frac{1}{2^m} \times 2^m = m$. La siguiente tabla, para algunos valores de m muestra lo justo que es esta cantidad:

m	2 ^m	m	2 ^m	m	2 ^m
0	1	3	8	6	64
1	2	4	16	8	256
2	4	5	32	16	65,536

8.- La esperanza ahora vale:

$$\frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{4} \times 4 + \dots + \frac{1}{2^m} \times 2^m + 2^m \left[\frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \frac{1}{2^{m+3}} \dots \right]$$

$$\dots] = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ términos}} + 1 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right] = m + 1$$

9.- 2 balboas.

10. Asignándole $\frac{1}{4}$ a la probabilidad de adivinar el número, la esperanza vale:

$$\frac{1}{4} \times \frac{4}{10} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{3}{10} \times 2 + \frac{1}{4} \times \frac{2}{10} \times 3 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} \times 4 = 0.50$$

Si se le asigna, y sería lo inteligente de hacer, 0.2, 0.3, 0.3, 0.2, a la probabilidad de acertar el 1, el 2, el 3 y el 4 respectivamente, la esperanza aumenta a 0.52, que son dos centavos más que nos ganamos en cada juego.

CAPITULO CUARTO

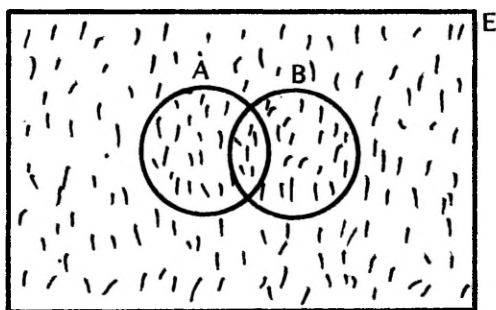
PROBABILIDAD CONDICIONAL

DE INTERSECCION Y DE UNION DE EVENTOS

4.1 Probabilidad Condicional

Supóngase que realizamos un experimento y que un evento A se ha verificado, podemos preguntarnos por la probabilidad de que un evento B también se haya verificado. Se trataría, en este caso, de la probabilidad de B dado que A se ha verificado, que se denota: $P(B/A)$

Para encontrar el valor de probabilidad de un evento B cualquiera sujeto a la condición de que otro evento A se verifique, razonamos, con los diagramas de Venn a la vista, del siguiente modo:



Si A se ha verificado, ninguno de los puntos exteriores a A tiene probabilidad de haber resultado. Es decir, que el espacio E queda reducido a A, pues sólo los puntos de éste pueden ya considerarse. Pero entonces hay que volver a distribuir la probabilidad sobre el nuevo espacio A para que la suma de probabilidades de sus puntos sea igual a 1. En esta redistribución, sin embargo, la probabilidad de cada punto de A debe estar en la misma proporción con A que la que antes tenía. Y estas dos cosas se logran multiplicando la probabilidad de cada punto de A por una constante c tal que la suma de estos productos sea igual a 1. Para obtener el valor de esta constante razonamos del siguiente modo: Si $A = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$

$$\sum_{i=1}^k c P(\{r_i\}) = 1$$

De donde, factorizando,

$$c \sum_{i=1}^k P(\{r_i\}) = 1$$

Pero $\sum_{i=1}^k P(\{r_i\}) = P(A)$, por definición. De donde resulta que el valor de la constante es, donde $P(A) > 0$,

$$c = \frac{1}{P(A)}$$

Viendo otra vez la gráfica de Venn, se ve claro que $P(B/A)$ es la probabilidad de $A \cap B$, donde la probabilidad de cada uno de los puntos de esta intersección ha sido multiplicada por $\frac{1}{P(A)}$. Es decir, que si $A \cap B = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$.

$$P(B/A) = \sum_{i=1}^k P(\{s_i\}) \times \frac{1}{P(A)} = \frac{1}{P(A)} \times \sum_{i=1}^k P(\{s_i\}) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Conviene mostrar cómo esta definición de probabilidad condicional:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ donde } P(A) > 0$$

satisface las tres exigencias de los axiomas.

En primer lugar, que

$$(B/A) \cap (C/A) = \phi \Rightarrow P[(B/A) \cup (C/A)] = P(B/A) + P(C/A)$$

Demostración:

- (1) $(B/A) \cap (C/A) = \phi$ [Hipótesis]
- (2) $(B \cap C)/A = \phi$ [(1)]
- (3) $P[(B/A) \cup (C/A)] = P[(B \cup C)/A]$
- (4) $P[(B \cup C)/A] = \frac{P[(B \cup C) \cap A]}{P(A)}$ [Definición]
- (5) $\frac{P[(B \cup C) \cap A]}{P(A)} = \frac{P[(A \cap B) \cup (A \cap C)]}{P(A)}$ [Distribución]
- (6) $\frac{P[(A \cap B) \cup (A \cap C)]}{P(A)} = \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C)}{P(A)}$ [A-1, (2)]
- (7) $\frac{P(A \cap B) + P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(A \cap C)}{P(A)}$
- (8) $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = P(B/A) + P(C/A)$ [Definición]
- (9) $P[(B/A) \cup (C/A)] = P(B/A) + P(C/A)$ [(3-8)]

En segundo lugar, que

$$0 \leq P(B/A) \leq 1$$

Demostración:

- (1) $A \cap B \subset A$ [Teorema de Teoría de Conjuntos]
- (2) $P(A \cap B) \leq P(A)$ [T-8, (1)]
- (3) $P(A) > 0$ [Definición]
- (4) $P(A \cap B) \geq 0$ [A-2]
- (5) $0 \leq \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1$ [(2-4)]
- (6) $0 \leq P(B/A) \leq 1$ [Definición, (5)]

Por último, que

$$[M(E) = n \wedge B/A = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}] \Rightarrow P(B/A) = 1$$

Demostración:

- (1) $M(E) = n$ [Hipótesis]
- (2) $B/A = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ [Hipótesis]
- (3) $A \cap B = A$ [(1), (2)]
- (4) $P(A \cap B) = P(A)$ [(3)]
- (5) $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1$ [(4)]
- (6) $P(B/A) = 1$ [Definición, (5)]

En este punto son pertinentes algunos ejemplos que ilustren la fórmula que comentamos para eventos condicionados.

Supóngase que tenemos dos dados marcados I y II respectivamente. Tiramos el dado I y sale 6. ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar el dado II obtengamos entre ambos por lo menos 11?

El experimento consiste, pues, en tirar los dos dados. Sabemos en consecuencia que el espacio contiene 36 puntos. Sea A el evento de que el

primer dado 1 salió 6, y B el de que entre ambos suman por lo menos 11. Queremos computar $P(B/A)$

Sabemos que $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ y $P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, porque los puntos que verifican el evento $A \cap B$ son (6,5), (6,6). Luego. $P(B/A) = \frac{1}{18} \times 6 = \frac{1}{3}$

Supóngase ahora, con el mismo ejemplo anterior, que sabemos que, después de tirar ambos dados, ha salido por lo menos 11, ¿cuál es la probabilidad de que el primer dado haya salido 6? Es decir, ahora interrogamos por $P(A/B)$. $P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, porque hay tres puntos que verifican al evento

B : (5, 6), (6, 5), (6, 6). Como ya sabemos que $P(A \cap B) = \frac{1}{18}$, $P(A/B) = \frac{1}{18} \times 12 = \frac{2}{3}$.

Como último ejemplo considérese el siguiente problema: En una urna hay cuatro bolitas numeradas del 1 al 4. Sacamos tres bolitas, una de las cuales, sabemos, es la 1. ¿Cuál es la probabilidad de que también hayamos sacado la 2?

El espacio de este experimento conviene tomarlo como el constituido por combinaciones de 4 elementos tomados de 3 en 3. Luego, contiene $\binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)! 3!} = 4$ puntos. A saber: $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$. Si A es el evento de que ha salido la bolita 1, $P(A) = \frac{3}{4}$. Si B es el evento de que ha salido la bolita 2, $P(A \cap B) = \frac{2}{4}$. Luego, $P(B/A) = \frac{2}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.

4.2 Probabilidad de Intersección de Eventos.—

De la fórmula $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, se deduce inmediatamente:

$$T-11 \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

Que es la fórmula para computar la probabilidad de un evento intersección, conocida la de uno de sus términos y la del otro bajo la condición de que el primero se haya verificado.

Por ejemplo, si A es el evento de salir un número par, tirando un dado, y B el de salir un número menor que 5, la probabilidad de que salga

un número menor que cinco, dado que ha salido uno par, es $\frac{2}{3}$, y en consecuencia, la de que salga un número par menor que 5, según la fórmula de arriba, es $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Otra forma más intuitiva de llegar a la fórmula de arriba es la siguiente:

$P(A) = \frac{n(A)}{N}$, donde N es el número de veces que el experimento se ha realizado para contar n(A). Si en esas n(A) veces B se ha verificado n(B) veces, $P(B/A) = \frac{n(B)}{n(A)}$. En consecuencia, en las N veces, $n(A \cap B) = n(B)$. y por tanto:

$$P(A \cap B) = \frac{n(B)}{N} = \frac{n(B)}{n(A)} \times \frac{n(A)}{N} = P(B/A) \times P(A) = P(A) \times P(B/A)$$

El teorema anterior se puede generalizar fácilmente para la intersección de tres eventos:

$$P[(A \cap B) \cap C] = P(A \cap B) \times P[C / (A \cap B)]$$

Aplicando nuevamente el teorema:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B/A) \times P[C / (A \cap B)]$$

Y, en general, para n eventos:

$$T-12 \quad P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \times P(A_2 / A_1) \times P(A_3 / A_1 \cap A_2) \times \dots \times P(A_n / \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

Otro teorema para la probabilidad condicional que se demuestra fácilmente, es

$$T-13 \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = P(B) \times P(A/B)$$

Efectivamente, despejando $P(A \cap B)$, pero esta vez de

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

se obtiene: $P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B)$

4.3 Eventos Independientes

La aplicación del teorema para la probabilidad de intersección de

eventos supone, pues, conocida la probabilidad condicional de uno de los términos, cosa que a veces es bastante difícil, salvo en los casos como en los juegos de azar. Sin embargo, son muy frecuentes los casos en que $P(B/A) = P(B)$. Es decir, en los que la probabilidad de un evento B no resulta afectada por la verificación de otro evento A. Decimos entonces que el evento B es independiente de A.

Se puede demostrar que esta relación de independencia es simétrica. Es decir, que si B es independiente de A, entonces A es independiente de B:

$$T-14 \quad P(B/A) = P(B) \Rightarrow P(A/B) = P(A)$$

Demostración:

- (1) $P(B/A) = P(B)$ [Hipótesis]
- (2) $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$ [Definición, (1)]
- (3) $P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ [(2)]
- (4) $P(A) = P(A/B)$ [Definición, (3)]

Cuando A y B son independientes, la fórmula para la probabilidad de intersección de eventos, se convierte en:

$$T-15 \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B), \text{ si A y B son independientes.}$$

Porque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$. Pero si A y B son independientes, $P(B) = P(B/A)$.

Esta fórmula para la probabilidad de intersección de eventos independientes es equivalente a la definición de probabilidad condicional que dimos, es decir, se implican mutuamente:

$$T-16 \quad P(A) = P(A/B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Demostración:

- (1) $P(A) = P(A/B)$ [Hipótesis]
- (2) $P(B) = P(B/A)$ [T-16, (1)]
- (3) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$ [T-11]
- (4) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ [(2), (4)]

Con esto se ha demostrado que la primera expresión implica la segunda. La demostración termina demostrando que la segunda implica igualmente la

primera:

$$(5) \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad [\text{Hipótesis}]$$

$$(6) \quad P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad [(5)]$$

$$(7) \quad P(A) = P(A/B) \quad [\text{Definición}]$$

Si A y B son independientes, también lo son A y \bar{B} . Es decir.

$$T-17 \quad P(A) = P(A/B) \Rightarrow P(A) = P(A/\bar{B})$$

Demostración:

$$(1) \quad P(A) = P(A/B) \quad [\text{Hipótesis}]$$

$$(2) \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad [T-15]$$

$$(3) \quad A = A \cap E \quad [\text{Identidad}]$$

$$(4) \quad A = A \cap (B \cup \bar{B}) \quad [\text{Complemento, (3)}]$$

$$(5) \quad A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \quad [\text{Distribución, (4)}]$$

$$(6) \quad P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \quad [A-1, (5)]$$

$$(7) \quad P(A) = P(A) \times P(B) + P(A \cap \bar{B}) \quad [(2), (6)]$$

$$(8) \quad P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A) \times P(B) \quad [(7)]$$

$$(9) \quad P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times [1 - P(B)] \quad [(8)]$$

$$(10) \quad P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P(\bar{B}) \quad [T-7, (9)]$$

$$(11) \quad P(A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} \quad [(10)]$$

$$(12) \quad P(A) = P(A/\bar{B}) \quad [\text{Definición}]$$

Uniendo este teorema con el anterior, resulta que si A y B son independientes, también lo son A y \bar{B} , \bar{A} y B, (y también, por simetría, B y A, \bar{B} y A, \bar{B} y \bar{A}).

T-18 En general, A_1, A_2, \dots, A_k son independientes

$$\text{si } P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times \dots \times P(A_k)$$

El matemático ruso Bernstein demostró que es posible que los eventos A_1, A_2, \dots, A_k sean independientes dos a dos, tres a tres,

etc..., sin que lo sean en bloque, que es como se estudia la independencia en la teoría de la probabilidad. Por ejemplo: En una urna hay cuatro tarjetas marcadas respectivamente: 110, 101, 011, 000. Considérese el experimento de sacar una tarjeta al azar. El espacio es: $\{110, 101, 011, 000\}$. En donde se supone que cada punto tiene $1/4$ como valor de probabilidad. Si A_1 es el evento de sacar una tarjeta marcada con un número en donde el 1 aparece en primer lugar, A_2 , una marcada con un número en donde el 1 aparece en segundo lugar, y A_3 , una tarjeta en cuyo número el 1 aparece en tercer lugar, entonces $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$. Ahora bien, como no hay ninguna tarjeta con el número 111, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$. Pero $P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) = \frac{1}{8}$. En consecuencia A_1, A_2, A_3 , no son independientes. Y sin embargo lo son dos a dos, porque

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1) \times P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4} = P(A_1) \times P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} = P(A_2) \times P(A_3)$$

Este mismo ejemplo de S. N. Bernstein se puede construir de la siguiente forma: Supóngase un experimento con el siguientes espacio, donde la probabilidad está uniformemente distribuida: $E = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$. Y sean los eventos $A = \{r_1, r_2\}$, $B = \{r_1, r_3\}$, $C = \{r_1, r_4\}$. Entonces, $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$

Estos tres eventos son independientes dos a dos, porque

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A) \times P(C)$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B) \times P(C)$$

Pero A, B, C , no son independientes en bloque, porque

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}. \quad Y \quad P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{8}$$

4.4 Probabilidad de Unión de Eventos

Con el teorema 11:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

y el 3:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

se obtiene:

$$T-19 \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B/A)$$

Con este teorema podemos computar la probabilidad de unión de eventos, conocidas las de uno de los eventos y la del otro, condicionada por la del primero, y no condicionada.

Por ejemplo: Se tira un par de dados. ¿Cuál es la probabilidad de que salga en ambos el mismo número o de que sumen 4?

Si A es el primero de estos eventos y B el segundo,

$P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{12}$. Además, $P(B/A) = \frac{1}{6}$. Aplicando el teorema de arriba:

$$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{9}$$

Otro ejemplo: En una urna hay dos bolitas rojas y una blanca, y en otra urna hay dos bolitas rojas y dos blancas. Se saca una bolita de cada urna. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos una bolita sea roja?

Sea A el evento de que la primera bolita sea roja y B el de que la segunda bolita sea roja. Buscamos $P(A \cup B)$. En este caso $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$. $P(B/A) = \frac{1}{4}$. Es decir, B y A son independientes. Luego,

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{6}$$

4.5 Probabilidad en Espacios Particionados

Un teorema muy importante por sus aplicaciones, y también porque se le va a necesitar en la sección siguiente, es:

T-20 Si B_1, B_2, \dots, B_k , constituyen una partición del espacio, entonces $P(A) = P(B_1) \times P(A/B_1) + P(B_2) \times P(A/B_2) + \dots + P(B_k) \times P(A/B_k)$. Es decir, que dada esa condición, $P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i) \times P(A/B_i)$

Demostración:

- (1) $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = E$ [Hipótesis]
- (2) B_1, B_2, \dots, B_k son disjuntos dos a dos [Hipótesis]
- (3) $A = A \cap E$ [Identidad]
- (4) $A = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k)$ [(1), (3)]
- (5) $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_k)$ [Distribución] [(4)]
- (6) $P(A) = P[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_k)]$ [(5)]
- (7) $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_k)$ [T-2, (2), (6)]
- (8) $P(A) = P(B_1) \times P(A/B_1) + P(B_2) \times P(A/B_2) + \dots + P(B_k) \times P(A/B_k)$ [T-12, (7)]
- (9) $P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i) \times P(A/B_i)$ [(8)]

Por ejemplo: Se ha calculado que la probabilidad de que un enfermo determinado tenga una enfermedad A es de 50%. La de que tenga una enfermedad B, el 10%. La de que tenga una enfermedad C, el 15%. Y la de que tenga una enfermedad D, el 25%. Por otra parte, la probabilidad de sanar si tiene la enfermedad A es de 80%. La de sanar con la enfermedad B es 90%. La de sanar con la enfermedad C es de 50%. Y la de sanar con la enfermedad D es sólo 10%. ¿Cuál es la probabilidad de que este enfermo muera?

La de que sane de acuerdo con el teorema de arriba, es:

$$0.5 \times 0.8 + 0.1 \times 0.9 + 0.15 \times 0.5 + 0.25 \times 0.1 = 0.59$$

La de que muera, en consecuencia, es de 41%

Un corolario importante del teorema que comentamos es:

$$T-21 \quad P(A) = P(B) \times P(A/B) + P(\bar{B}) \times P(A/\bar{B})$$

Se deriva inmediatamente del teorema 20 porque cualquier evento y su complementario forman una partición del espacio.

Ejemplo: La probabilidad de que una bujía tomada al azar sea de una marca B, es $\frac{7}{10}$. Además, la probabilidad de que una bujía de esta marca B sea buena, es $\frac{83}{100}$. La probabilidad de que una bujía de cualquiera otra marca sea buena es sólo $\frac{63}{100}$. ¿Cuál es la probabilidad de que una bujía tomada al azar sea buena?

Sea A el evento de que sea buena una bujía tomada al azar, y B el evento de que sea de marca B. Se nos dice que

$$P(B) = \frac{7}{10} \text{ y que } P(A/B) = \frac{83}{100}. \text{ Además, que } P(A/\bar{B}) = \frac{63}{100}.$$

Inmediatamente se deduce que $P(\bar{B}) = \frac{3}{10}$. Con esto tenemos todos los datos necesarios para aplicar el corolario que comentamos:

$$P(A) = \frac{7}{10} \times \frac{83}{100} + \frac{3}{10} \times \frac{63}{100} = \frac{77}{100}$$

4.6 La Fórmula de Bayes

Del teorema demostrado: $P(A) \times P(B/A) = P(B) \times P(A/B)$, se infiere inmediatamente un teorema que tiene mucha aplicación:

$$P(A/B) = \frac{P(A) \times P(B/A)}{P(B)}$$

Por ejemplo: En una urna hay 10 bolitas: 4 rojas, 2 verdes y 4 blancas. Se sacó una bolita que no era roja. ¿Cuál es la probabilidad de que sea verde? (Este problema, y el siguiente, se pueden resolver fácilmente determinando el espacio, pero en este momento es preferible aplicar la fórmula que comentamos):

$$P(V) = \frac{2}{10}, P(\bar{R}/V) = 1, P(\bar{R}) = \frac{6}{10}. \text{ En consecuencia}$$

$$P(V/\bar{R}) = \frac{\frac{2}{10} \times 1}{\frac{6}{10}} = \frac{1}{3} = \frac{P(V) \times P(\bar{R}/V)}{P(\bar{R})}$$

Otro ejemplo: Se tira un dado y sale un número par. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea 6?

$$P(\bar{S}/P) = \frac{P(\bar{S}) \times P(P/\bar{S})}{P(P)} = \frac{\frac{5}{6} \times \frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

A partir de los dos últimos teoremas se deriva inmediatamente el teorema conocido con el nombre de fórmula de Bayes:

T-23 Si A_1, A_2, \dots, A_k , constituyen una partición del espacio, en-

$$\text{tonces } P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \times P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^k P(A_i) \times P(B/A_i)}$$

Demostración:

(1) A_1, A_2, \dots, A_k , es una partición de E [Hipótesis]

(2) Si A_1, A_2, \dots, A_k , constituyen una partición de E, entonces $P(B) =$ [T-20]

$$= \sum_{i=1}^k P(A_i) \times P(B/A_i)$$

(3) $P(B) = \sum_{i=1}^k P(A_i) \times P(B/A_i)$ [(1), (2)]

$$(4) P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \times P(B/A_i)}{P(B)} \quad [T-22]$$

$$(5) P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \times P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^k P(A_i) \times P(B/A_i)} \quad [(3), (4)]$$

Por ejemplo:

Supóngase que un blanco está situado sobre alguna parte de un segmento dividido en 5 zonas A, B, C, D, E. No se sabe con exactitud sobre cuál de las cinco zonas está el blanco, pero sí los siguientes valores de probabilidad: La probabilidad de que esté en la zona A es 0.05. La de que esté en la zona del otro extremo E es igualmente 0.05. La de que esté en la zona B es 0.21. Igualmente la de que esté en la zona D. La probabilidad de que esté en la zona central C es 0.48. Como la probabilidad de que esté en la zona C es la mayor, se hace fuego sobre esa zona. Teniendo en cuenta los errores de tiro, es perfectamente posible dar en el blanco aunque éste no se halle en la zona C. Sean A, B, C, D, E, los eventos de que esté el blanco en esa zona respectivamente, y F el evento de dar en el blanco. Supóngase igualmente que se cuenta con los siguientes datos: $P(F/A) = 0.06$; $P(F/B) = 0.16$; $P(F/C) = 0.56$; $P(F/D) = 0.18$; $P(F/E) = 0.06$. Además, con la información de que se ha dado en el blanco. La fórmula de Bayes permite computar la probabi-

lidad de que esté en cada una de esas zonas, dado que se haya dado en el blanco. Estos nuevos valores de probabilidad se llaman a posteriori para distinguirlos de los valores a priori de probabilidad que se tenían antes de contar con la experiencia de haber dado en el blanco. El cómputo de uno de los valores a posteriori de probabilidad en el problema que comentamos es:

$$P(C/F) = \frac{0.48 \times 0.56}{0.05 \times 0.06 + 0.21 \times 0.16 + 0.48 \times 0.56 + 0.21 \times 0.18 + 0.05 \times 0.06} = 0.77$$

En general, la fórmula de Bayes se aplica cuando, con relación a un experimento, se puede formular un conjunto de hipótesis que forman una partición del espacio, cuyos valores de probabilidad conocemos, y además, la probabilidad condicional de algún evento con relación a cada una de esas hipótesis. Si ese evento se verifica, las probabilidades de cada hipótesis varían. La fórmula de Bayes computa estos nuevos valores de probabilidad.

4.7 Ejercicios

1. Se tira un par de dados. ¿Cuál es la probabilidad de que salga 7 u 11?
2. Se saca al azar una carta de un mazo. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un rey o un trébol?
3. En una urna hay 20 bolitas rojas y 5 blancas, y en otra urna hay 30 bolitas rojas y 10 blancas. Se saca una bolita de cada urna. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos una bolita sea roja?
4. Una urna contiene 15 bolitas rojas y 5 blancas. Otra urna contiene 1 bolita roja y 4 blancas. Se tira una moneda. Si sale cara, se saca una bolita de la primera urna. Si sale sello, se saca una bolita de la segunda urna. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bolita roja?
5. Se tiran tres monedas. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan a lo sumo dos sellos o por lo menos dos caras?
6. Se tiran dos monedas. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos monedas salgan igual o que por lo menos una sea cara?
7. Se tiran dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número menor o igual que 2, menor o igual que 3, o menor o igual que 4?
8. Se tira una moneda y un dado. ¿Cuál es la probabilidad.
 - a) de que la moneda salga cara y el dado un número par?
 - b) de que la moneda salga cara o el dado un número par?

9. Se tiran dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número menor o igual 10? (Sugerencia: Resuélvase mediante el evento complementario).

10. Un producto de aluminio puede ser de mala calidad si es muy suave o si está fuera de tolerancia. el 10% de unos productos determinados de aluminio son muy suaves y están fuera de tolerancia. Además, el 25% de ellos son demasiado suaves y el 40% están fuera de tolerancia. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de esos productos, elegidos al azar,

- a) no sea suave ni esté fuera de tolerancia?
- b) sea muy suave o esté fuera de tolerancia?

11. Un tirador acierta el 80% de sus disparos, y otro, (en las mismas condiciones), el 70%. ¿Cuál es la probabilidad de que se dé en el blanco cuando ambos tiradores disparan simultáneamente sobre él?

12. Consideremos sólo las familias que tienen 2 hijos, (varones o mujeres). Si sabemos que una familia determinada tiene un hijo varón, ¿cuál es la probabilidad de que el otro hijo también lo sea?

13. Elegimos al azar a un varón de una familia que tiene dos hijos, ¿cuál es la probabilidad de que su hermano también sea varón?

14. Una urna A contiene 2 bolitas rojas. Otra urna B contiene una bolita blanca y una roja. Se elige una urna al azar y se saca una bolita, que resulta ser roja. ¿Qué probabilidad hay de que se haya sacado de la urna A?

15. Se tiran dos dados. Se sabe que uno de ellos ha salido 6. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos hayan salido 6?

16. Se tiran tres monedas. Sabemos que no han salido todas caras ni todas sellos. ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido un número impar de caras?

17. En una cierta población el 50% son liberales. 40% son conservadores, y 10% no pertenecen a ningún partido. El 80% de los liberales está de acuerdo con determinado proyecto, igualmente el 20% de los conservadores y el 45% de los que no pertenecen a ningún partido. Se elige una persona al azar y se encuentra con que está de acuerdo con el proyecto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea

- a) liberal?
- b) conservador?
- c) sin partido?

18. Supóngase que el 5% de los varones y el 1% de las mujeres son daltónicos, y que varones y mujeres constituyen respectivamente el 50% de una población. Un oftalmólogo que estudia el daltonismo elige al azar a un daltónico. ¿Cuál es la probabilidad de que sea

- a) varón?
- b) mujer?

19. Se tira un dado tetraedro irregular cuyos lados están marcados 1, 2, 3, 4. Las probabilidades de que salga cada uno de estos dados son, respectivamente: 0.1, 0.2, 0.3, 0.4. Si ha salido cara 1 o cara 2, cuál es la probabilidad de que haya salido cara 1?

20. Se tira una moneda hasta que salga cara o que haya sido tirada tres veces. Si no ha salido cara en la primera tirada, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido tirada tres veces?

21. Se hace una mezcla con cuatro diferentes tipos de granos, de tal forma que un grano elegido al azar tiene 0.96 de probabilidad de ser del primer tipo, 0.01 de ser del segundo, 0.02 de ser del tercero, y 0.01 de ser del cuarto. Por otra parte, la probabilidad de que un grano del primer tipo dé una espiga que contenga más de 50 granos es de 0.50. Para los granos del segundo tipo, la probabilidad de dar espigas tales es 0.15. Para los del tercer tipo, 0.20. Y para los del cuarto tipo, 0.05. ¿Cuál es la probabilidad de que un grano tomado al azar de la mezcla de una espiga que contenga más de 50 granos?

22. En una caja hay n_1 tarjetas marcadas con el número 1 y n_2 tarjetas marcadas con el número 2. Se saca una tarjeta al azar. Si sale una tarjeta con el número 1, se saca una bolita de una urna que contiene r_1 bolitas rojas y b_1 bolitas blancas. Y si sale una tarjeta con el número 2, se saca una bolita de otra urna que contiene r_2 bolitas rojas y b_2 bolitas blancas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bolita roja?

23. En una fábrica una máquina A produce el 30% de los productos, una máquina B, el 25% y una máquina C el 45% restante. El 1% de los productos de la máquina A salen defectuosos, igualmente el 1.2% de los que produce la máquina B y el 2% de los que produce la máquina C. En un día, las máquinas producen 10,000 productos. Se elige un producto al azar de los hechos en un día y se encuentra que es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que ese producto haya sido hecho por la máquina.

- a) A?
- b) B?
- c) C?

24. Una caja contiene $n_1 + n_2 + n_3$ tarjetas, donde n_1 tarjetas están marcadas con el número 1, n_2 con el número 2 y n_3 con el número 3. Por otra parte, hay tres urnas, numeradas con los números 1, 2, 3, respectivamente. La urna número i contiene r_i bolitas rojas y b_i blancas. Se saca una

tarjeta de la caja y luego una bolita de la urna del mismo número de la tarjeta obtenida. Si la bolita así obtenida es roja, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido de la urna número 2?

Respuestas.—

$$1.- \frac{6}{36} + \frac{2}{36} - 0 = \frac{2}{9}$$

$$2.- \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$$

$$3.- \frac{20}{25} + \frac{30}{40} - \frac{20}{25} \times \frac{30}{40} = \frac{19}{20}$$

$$4.- \frac{1}{2} \times \frac{15}{20} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{19}{40}$$

$$5.- \frac{7}{8} + \frac{4}{8} - \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$$

$$6.- \frac{2}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$7.- \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} - \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

$$8.- a) \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; \quad b) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$9.- 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

$$10.- a) 1 - \frac{55}{100} = \frac{45}{100} = 0.45$$

$$b) \frac{25}{100} + \frac{40}{100} - \frac{10}{100} = \frac{55}{100} = 0.55$$

$$11.- \frac{80}{100} + \frac{70}{100} - \frac{80}{100} \times \frac{70}{100} = \frac{94}{100} = 94\%$$

12. El espacio del experimento es $\{(V,V), (V,M), (M,V), (M,M)\}$ donde el primer componente de cada par es el hijo mayor. Es decir, cada punto representa una familia. Si U es el evento de que un hijo es varón y D el de que los dos lo son,

$$P(D/U) = \frac{P(D \cap U)}{P(U)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

13. En cambio, el espacio de este experimento, que no debe confundirse con el del problema anterior, es $\{(V_+, V_-), (V_+, M_-), (V_-, V_+), (V_-, M_+), (M_+, M_-), (M_+, V_-), (M_-, M_+), (M_-, V_+)\}$ Donde el primer componente es el hijo elegido y "+", "-", indican que se trata del mayor y menor respectivamente. Es decir, en este caso, los puntos no son familias sino hijos.

$$P(D/U) = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{2}$$

14. Si A y B son los eventos de sacar una bolita de las urnas A, B, respectivamente, y R el de que la bolita sea roja, se pregunta por $P(A/R)$.

$$P(A/R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{P(A) \times P(R/A)}{P(R)}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}; P(R/A) = 1; P(R) = P[(A \cap R) \cup (B \cap R)] = \\ = P(A \cap R) + P(B \cap R) = P(A) \times P(R/A) + P(B) \times P(R/B) =$$

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \quad \text{Luego, } \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

Este problema se habría podido resolver fácilmente mediante la determinación del espacio: $\{(A,R), (B,R), (B,\bar{R})\}$

Si ha salido una bolita roja, el espacio queda reducido a los dos primeros puntos, de probabilidad $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ respectivamente, que hay que

multiplicar por $\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$. Luego, el resultado sería $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

15. Si U es el evento de que uno de ellos ha salido 6, y D el de que los dos han salido 6,

$$P(D/U) = \frac{P(D \cap U)}{P(U)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{1}{11}$$

16. Sea C el evento de que las tres salen cara y S el de que las tres salen sello e I el de que salga un número impar de caras. Se busca, $P(I/C \cap \bar{S})$. Pero $C \cap \bar{S} = C \cup \bar{S}$, luego

$$P(I/\bar{C} \cap \bar{S}) = P(I/\overline{C \cup S}) = \frac{P[I \cap (\overline{C \cup S})]}{P(\overline{C \cup S})}$$

Por otra parte, $P[I \cap (C \cup S)] = \frac{3}{8}$, porque los únicos puntos que verifican el evento en cuestión, son (C,S,S) , $(,S,C,S)$, (S,S,C) . y $P(C \cup S)$

$$= 1 - P(C \cup S) = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Luego, el resultado es } \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

17.- Se busca $P(L/A)$, $P(C/A)$, $P(S/A)$.

$$\text{Sabemos que } P(A) = P(L \cap A) + P(C \cap A) + P(S \cap A) = \frac{\frac{80}{100} \times 50}{100} +$$

$$+ \frac{\frac{20}{100} \times 40}{100} + \frac{\frac{45}{100} \times 10}{100} = \frac{40}{100} + \frac{8}{100} + \frac{9}{200} = \frac{21}{40}$$

$$\text{a) } P(L/A) = \frac{P(L \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{40}{100}}{\frac{21}{40}} = 0.762$$

$$\text{b) } P(C/A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{100}}{\frac{21}{40}} = 0.152$$

$$\text{c) } P(S/A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{200}}{\frac{21}{40}} = 0.086$$

18.- Se busca $P(V/D)$, $P(M/D)$.

$$P(D) = P(D \cap V) + P(D \cap M) = \frac{\frac{5}{100} \times 50}{100} + \frac{\frac{1}{100} \times 50}{100} = \frac{5}{200} + \frac{1}{200} = \frac{3}{100}$$

$$a) P(V/D) = \frac{P(D \cap V)}{P(D)} = \frac{\frac{5}{100}}{\frac{3}{100}} = \frac{5}{3} = 0.83$$

$$b) P(M/D) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{3}{100}} = \frac{1}{3} = 0.17$$

$$19.- P(U/U \cup D) = \frac{P[U \cap (U \cup D)]}{P(U \cup D)} = \frac{0.1}{0.3} = 0.33$$

20.- El espacio de este experimento es $\{C, (S,C), (S,S,C), (S,S,S)\}$
 Si $A = \{C\}$ y $B = \{(S,S,C), (S,S,S)\}$, se busca,

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{2}$$

$$21. 0.96 \times 0.50 + 0.01 \times 0.15 + 0.02 \times 0.20 + 0.01 \times 0.05 = 0.486$$

22. Si R es el evento de sacar una bolita roja, T_1 el de sacar una tarjeta marcada con el 1 y T_2 el de sacar una tarjeta marcada con el 2, la aplicación del teorema para espacios particionados da:

$$P(R) = P(T_1) \times P(R/T_1) + P(T_2) \times P(R/T_2)$$

De acuerdo con la información dada, esto es:

$$P(R) = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \times \frac{r_1}{r_1 + b_1} + \frac{n_2}{n_1 + n_2} \times \frac{r_2}{r_2 + b_2}$$

23. Sea A, B, C, los eventos de ser hechos por las máquinas A, B, C, respectivamente, y D el evento de ser defectuoso. Se busca $P(A/D)$, $P(B/D)$, $P(C/D)$. De acuerdo con la fórmula de Bayes:

$$a) P(A/D) = \frac{\frac{30}{100} \times \frac{1}{100}}{\frac{30}{100} \times \frac{1}{100} + \frac{25}{100} \times \frac{1.2}{100} + \frac{45}{100} \times \frac{2}{100}} = \frac{\frac{3}{1000}}{\frac{15}{1000}} = \frac{1}{5} = 0.20$$

$$b) P(B/D) = \frac{\frac{25}{100} \times \frac{1.2}{100}}{\frac{30}{100} \times \frac{1}{100} + \frac{25}{100} \times \frac{1.2}{100} + \frac{45}{100} \times \frac{2}{100}} = \frac{\frac{3}{1000}}{\frac{15}{1000}} = \frac{1}{5} = 0.20$$

$$c) P(C/D) = \frac{\frac{45}{100} \times \frac{2}{100}}{\frac{30}{100} \times \frac{1}{100} + \frac{25}{100} \times \frac{1.2}{100} + \frac{45}{100} \times \frac{2}{100}} = \frac{\frac{9}{1000}}{\frac{15}{1000}} = \frac{9}{15} = 0.60$$

Este problema ilustra bien la principal aplicación del teorema de Bayes: La de redistribuir los valores de probabilidad en ocasión de una experiencia, (en este caso, la de saber que el artículo elegido es defectuoso). Antes de saber que el artículo es defectuoso, la probabilidad de que un artículo fuese producido por la máquina A, era de 30%. Desde el momento de saber que es defectuoso, el teorema de Bayes nos permite modificarla a 20%. Lo mismo con respecto a las otras máquinas. (la información de que el artículo se ha tomado de una muestra grande de 10,000 es sólo para asegurarnos de la validez del raciocinio probabilístico).

24.- Sea R el evento de salir una bolita roja, y H_1, H_2, H_3 , los eventos de haber sacado la bolita de las urnas 1, 2 y 3 respectivamente. La aplicación de la fórmula de Bayes entonces da:

$$P(H_2/R) = \frac{P(H_2) \times P(R/H_2)}{P(H_1) \times P(R/H_1) + P(H_2) \times P(R/H_2) + P(H_3) \times P(R/H_3)}$$

Que con la información dada es:

$$P(H_2/R) = \frac{\frac{n_2}{n_1 + n_2 + n_3} \times \frac{r_2}{r_2 + b_2}}{\sum_{i=1}^3 \frac{n_i}{n_1 + n_2 + n_3} \times \frac{r_i}{r_i + b_i}}$$

4.8 Teorema del Binomio.-

Se puede demostrar que para cualquier entero positivo (o cero) n:

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \dots +$$

$$\binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Más explícitamente, como quiera que $\binom{n}{0} = 1$, $b^0 = 1$, $a^0 = 1$, $\binom{n}{n} = 1$, este teorema, llamado del binomio, y que tiene una aplicación muy interesante en la teoría de la probabilidad, puede ser expresado así:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \dots + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

La demostración de este teorema se puede llevar a cabo mediante ese tipo de raciocinio que se llama **inducción matemática** y que consiste en mostrar que es verdad para $n+1$ (o $n=0$), y que si es verdad para un número k cualquiera (natural), lo es igualmente para su sucesor $k+1$.

Es obvio e inmediato que el teorema se satisface para $n=1$:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a+b$$

Para demostrar que si el teorema es verdad para un valor k cualquiera lo es igualmente para $k+1$, basta demostrar que si el coeficiente del término $a^k b^r$ en la expansión de $(a+b)^k$ es $\binom{k}{r}$, el del término $a^{k+1-r} b^r$ en la expansión de $(a+b)^{k+1}$ es $\binom{k+1}{r}$.

Por hipótesis, (prueba condicional):

$$(a+b)^k = a^k + \dots + \binom{k}{r-1} a^{k+1-r} b^{r-1} + \binom{k}{r} a^{k-r} b^r + \dots + b^k$$

Multiplicando ambos términos de la igualdad por $a+b$:

$$a^{k+1} + \dots + \binom{k}{r-1} a^{k+2-r} b^{r-1} + \binom{k}{r} a^{k+1-r} b^r + \dots + ab^k$$

$$a^k b + \dots + \binom{k}{r-1} a^{k+1-r} b^r + \dots + b^{k+1}$$

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \dots + \binom{k}{r} a^{k+1-r} b^r + \dots + b^{k+1}$$

El coeficiente del término que buscamos se puede simplificar:

$$\binom{k}{r} + \binom{k}{r-1} = \frac{k!}{r!(k-r)!} + \frac{k!}{(r-1)!(k-r+1)!} = \frac{k!(k-r+1) + k!r}{r!(k-r+1)!} =$$

$$= \frac{k i (k + 1)}{r i (k + 1 - r)} = \frac{(k + 1) i}{r i (k + 1 - r)} = \binom{k + 1}{r}$$

Que esto que se quería demostrar.

Otra forma, menos elegante, de demostrar el teorema del binomio es la siguiente:

Por definición, $(a + b)^n = (a + b)(a + b) \dots (a + b)$. En donde el miembro derecho de esta igualdad está compuesto por n factores. El producto de estos n factores se forma, en virtud de la ley distributiva, multiplicando cada término de cada factor por cada término de los demás factores y sumando entre sí todos estos productos. En particular, uno de los términos obtenidos será a^n , resultado de multiplicar los primeros términos de cada factor; y, en general, $a^{n-r}b^r$, donde $0 \leq r \leq n$, será el término obtenido al multiplicar el segundo término por el segundo término de r factores y por el primer término de $n-r$ factores. Ahora bien, como en este caso se ha elegido la b , r veces, de las n posibles, habrá $\binom{n}{r}$ de tales términos. Y como, por otra parte, la b es elegida de 0 a n veces, inclusive, queda demostrado el teorema.

Con el teorema del binomio se puede demostrar fácil y rápidamente que los subconjuntos posibles de un conjunto de tamaño n es 2^n . Efectivamente, asignándole a "a" y "b" el valor de 1, el teorema dice:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

Porque todos los términos se convierten en la unidad por el principio de idempotencia que los rige.

Es bien sabido que si los coeficientes de la expansión de un binomio se ponen en fila, una debajo de la otra, en donde en la primera fila se ponen los que corresponden a la potencia 0 del binomio, en la segunda, los que corresponden a la primera potencia, en la tercera los de la segunda potencia, etc., y se corre un lugar a la izquierda cada fila, se obtiene la siguiente figura:

el punto en el que r_1 se ha verificado k veces, y b , en consecuencia $n-k$ veces. Su probabilidad será, de acuerdo con el principio sobre espacios producto $a^k b^{n-k}$. Y el número de ellos, de acuerdo con la fórmula de permutaciones, ${}_n P_n^{k, n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, que por tener sólo dos clases de componentes, puede expresarse en términos de combinaciones $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$

En consecuencia, la probabilidad de que se verifique k veces el componente cuya probabilidad es a , en el experimento cuyo espacio producto es A^n , es:

$$\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Donde el otro componente $b = 1 - a$.

Expresado más en compacto:

$$P(k; n, a) = \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Que se lee: Probabilidad de que k de n veces se verifique el acontecimiento de probabilidad a .

Podemos expresar el coeficiente de la fórmula anterior por su equivalente $\binom{n}{n-k}$, porque efectivamente:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{[n-(n-k)]! (n-k)!} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Quedaría entonces así: $\binom{n}{n-k} a^k b^{n-k}$. Comparando esta expresión con cualquier término de la expansión del binomio, vemos que $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r = P(n-r; n, a)$. Como r corre del 0 hasta n , resulta que cada término es la probabilidad de que el componente de probabilidad a se verifique ninguna vez, una vez, dos veces, ..., n veces. Por supuesto, la suma de todos estos valores es igual a 1, ya que forman un espacio, pero no un espacio producto, pues sus puntos no son nuplas sino conjuntos. A la distribución de la probabilidad en este espacio, se le llama distribución binomial.

Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de que tirando 100 monedas salgan exactamente 50 caras? Supuesto que la probabilidad de salir cara sea $\frac{1}{2}$, la aplicación de la fórmula da:

$$P(50; 100, \frac{1}{2}) = \binom{100}{50} \left(\frac{1}{2}\right)^{50} \left(\frac{1}{2}\right)^{50} = \frac{100!}{50! 50!} \times \frac{1}{2^{100}}$$

Otro ejemplo, en el que los componentes tienen diferente valor de probabilidad: La tasa de mortalidad de una enfermedad determinada es 0.3. De veinte personas que sufren la enfermedad en cuestión, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 15 sanen?

$$P(15; 20, 0.7) = \binom{20}{15} 0.7^{15} 0.3^5 = \frac{20!}{5! 15!} \times 0.7^{15} 0.3^5$$

A menos que la computación sea sencilla, conviene dejar la respuesta de estos problemas en su forma exponencial y factorial, sin hacer la aritmética).

Otro ejemplo: Se tiran cuatro dados. ¿Cuál es la probabilidad de que

- salgan exactamente dos ases?
- salgan por lo menos dos ases?
- salgan a lo sumo dos ases?

a) La probabilidad de que salgan exactamente dos ases es, de acuerdo con la fórmula:

$$P(2; 4, \frac{1}{6}) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 6 \binom{5^2}{6^4} = \frac{5^2}{6^3} = \frac{25}{216}$$

b) Como el evento de que salgan por lo menos dos ases se verifica cuando salen exactamente dos, tres y cuatros ases, su valor de probabilidad es:

$$P(2; 4, \frac{1}{6}) + P(3; 4, \frac{1}{6}) + P(4; 4, \frac{1}{6}) = \frac{5^2}{6^3} + \binom{4}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right) +$$

$$\binom{4}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{5^2}{6^3} + 4 \left(\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{6^4} = \frac{5^2}{6^3} + \frac{21}{6^4} = \frac{6 \times 5^2 + 21}{6^4} = \frac{171}{6^4}$$

c) Por último, el evento de que salgan a lo sumo dos ases se verifica cuando no sale ninguno, cuando sale exactamente uno y cuando salen exactamente dos:

$$P(0; 4, \frac{1}{6}) + P(1; 4, \frac{1}{6}) + P(2; 4, \frac{1}{6}) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^4 +$$

$$\binom{4}{1} \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \frac{5^2}{6^3} = \frac{5^4}{6^4} + 4 \left(\frac{5^3}{6^4}\right) + \frac{5^2}{6^3} = \frac{5^4 + 4 \times 5^3 + 5^2 \times 6}{6^4} = \frac{1275}{6^4}$$

4.10 Ejercicios

(Sin hacer la aritmética, a menos que sea muy sencilla)

1. La probabilidad de que una semilla de cierto tipo germine es 0.9. Si se siembran 10 semillas, ¿cuál es la probabilidad de que las 10 germinen?
2. Sólo el 1% de cierto producto es defectuoso. Si se eligen al azar tres de tales productos, ¿cuál es la probabilidad de que
 - a) los tres sean buenos?
 - b) exactamente dos sean buenos?
 - c) exactamente uno sea bueno?
 - d) ninguno sea bueno?
3. Se tiran 5 monedas. ¿cuál es la probabilidad de que salgan por lo menos tres caras?
4. Si la probabilidad de que un cohete funcione bien es 0.6 y se disparan 10 de ellos, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 7 funcionen bien?
5. Un examen de "cierto-falso" contiene 10 proposiciones. Supuesto que el examen se haga sin ningún conocimiento, eligiendo en cada caso la respuesta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que
 - a) exactamente 4 respuestas sean correctas?
 - b) exactamente 4 respuestas sean falsas?
 - c) por lo menos 8 respuestas sean correctas?
 - d) por lo menos la mitad estén correctas?
6. El 80% de los enfermos de cierta enfermedad recobran la salud. Si observamos a 10 pacientes de dicha enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 8 sanen?
7. Se tiran 6 monedas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar exactamente 3 caras?
8. Se tiran dos dados 10 veces. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 7 exactamente una vez?
9. El 60% de cierto producto funciona bien. Si se compran 5 de estos productos, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 2 funcionen bien?
10. Si el 60% de una población votante son partidarios de un candidato determinado, de 5 de ellos elegidos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 3 sean partidarios de ese candidato?
11. Se sacan 5 cartas de un mazo, con restitución. ¿Cuál es la probabilidad de sacar por lo menos 2 ases?
12. Se tiran n pares de dados. ¿Cuál es la probabilidad de sacar exactamente k sietes?

13. Se tira una moneda 100 veces. ¿Cuál es la probabilidad de sacar exactamente 47 caras?

14. Se tira un dado icosaedro 100 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el lado 16 no salga más de 47 veces?

15. Se tiran dos dados 100 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el número que sale en cada tirada no exceda 7 más de 97 veces?

16. La probabilidad de ganar en cierta clase de rifa es $\frac{1}{5}$. ¿Cuál es la probabilidad de ganarse por lo menos y 4 de tales rifas, participando en 6 de ellas?

Respuestas. —

$$1.- P(10; 10, 0.9) = \binom{10}{10} (0.9)^{10} (0.9)^0 = (0.9)^{10}$$

$$2.- a) P(3; 3, 0.99) = \binom{3}{3} (0.99)^3 (0.01)^0 = (0.99)^3$$

$$b) P(2; 3, 0.99) = \binom{3}{2} (0.99)^2 (0.01) = 3 (0.99)^2 (0.01)$$

$$c) P(1; 3, 0.99) = \binom{3}{1} (0.99) (0.01)^2 = 3 (0.99) (0.01)^2$$

$$d) P(0; 3, 0.99) = \binom{3}{0} (0.99)^0 (0.01)^3 = (0.01)^3$$

$$3.- P(3; 5, \frac{1}{2}) + P(4; 5, \frac{1}{2}) + P(5; 5, \frac{1}{2}) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{10}{2^5} + \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^5} = \frac{16}{2^5} = \frac{1}{2}$$

$$4.- P(7; 10, 0.6) + P(8; 10, 0.6) + P(9; 10, 0.6) + P(10; 10, 0.6) = \binom{10}{7} (0.6)^7 (0.4)^3 + \binom{10}{8} (0.6)^8 (0.4)^2 + \binom{10}{9} (0.6)^9 (0.4) + (0.6)^{10} = 120 (0.6)^7 (0.4)^3 + 45 (0.6)^8 (0.4)^2 + 10 (0.6)^9 (0.4) + (0.6)^{10}$$

$$5 a) P(4; 10, \frac{1}{2}) = \binom{10}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{105}{512}$$

$$b) P(4; 10, \frac{1}{2}) = P(6; 10, \frac{1}{2}) = \binom{10}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{105}{512}$$

$$c) P(8; 10, \frac{1}{2}) + P(9; 10, \frac{1}{2}) + P(10; 10, \frac{1}{2}) = \binom{10}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{10}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right) + \binom{10}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{7}{128}$$

$$d) P(5; 10, \frac{1}{2}) + P(6; 10, \frac{1}{2}) + P(7; 10, \frac{1}{2}) + P(8; 10, \frac{1}{2}) + P(9; 10, \frac{1}{2}) + P(10; 10, \frac{1}{2}) = \left[\binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} \right] \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$+ \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} \left] \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{319}{512}$$

$$6.- P(8; 10, 0.8) = \binom{10}{8} (0.8)^8 (0.2)^2 = 45 (0.8)^8 (0.2)^2$$

$$7.- P(3; 6, \frac{1}{2}) = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

$$8.- P(1; 10, \frac{1}{6}) = \binom{10}{1} \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^9 = \frac{10 \times 5^9}{6^{10}}$$

$$9.- P(0; 5, 0.6) + P(1; 5, 0.6) = \binom{5}{0} (0.4)^5 + \binom{5}{1} (0.6) (0.4)^4 = (0.4)^5 + 5 (0.6) (0.4)^4$$

$$10.- P(3; 5, 0.6) + P(4; 5, 0.6) + P(5; 5, 0.6) = \\ = \binom{5}{3} (0.6)^3 (0.4)^2 + \binom{5}{4} (0.6)^4 (0.4) + \binom{5}{5} (0.6)^5 = \\ = 10 (0.6)^3 (0.4)^2 + 5 (0.6)^4 (0.4) + (0.6)^5$$

$$11.- P(2; 5, \frac{1}{13}) + P(3; 5, \frac{1}{13}) + P(4; 5, \frac{1}{13}) + \\ + P(5; 5, \frac{1}{13}) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{13}\right)^2 \left(\frac{12}{13}\right)^3 + \binom{5}{3} \left(\frac{1}{13}\right)^3 \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{1}{13}\right)^4 \left(\frac{12}{13}\right) + \\ + \binom{5}{5} \left(\frac{1}{13}\right)^5 = 10 \left(\frac{1}{13}\right)^2 \left(\frac{12}{13}\right)^3 + 10 \left(\frac{1}{13}\right)^3 \left(\frac{12}{13}\right)^2 + 5 \left(\frac{1}{13}\right)^4 \left(\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{1}{13}\right)^5$$

Otro método más fácil habría sido:

$$1.- [P(0; 5, \frac{1}{13}) + P(1; 5, \frac{1}{13})] = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^5 - 5 \left(\frac{1}{13}\right) \left(\frac{12}{13}\right)^4$$

$$12.- P(k; n, \frac{1}{6}) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$

$$13.- P(47; 100, \frac{1}{2}) = \binom{100}{47} \left(\frac{1}{2}\right)^{47} \left(\frac{1}{2}\right)^{53} = \binom{100}{47} \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

$$14.- P(\leq 47; 100, \frac{1}{20}) = \binom{100}{0} \left(\frac{1}{20}\right)^0 \left(\frac{19}{20}\right)^{100} + \\ + \binom{100}{1} \left(\frac{1}{20}\right) \left(\frac{19}{20}\right)^{99} + \dots + \binom{100}{47} \left(\frac{1}{20}\right)^{47} \left(\frac{19}{20}\right)^{53} =$$

$$\sum_{r=0}^{47} \binom{100}{r} \left(\frac{1}{20}\right)^r \left(\frac{19}{20}\right)^{100-r}$$

15.- La probabilidad de que sume	$2 = \frac{1}{36}$
" " " " "	$3 = \frac{2}{36}$
" " " " "	$4 = \frac{3}{36}$
" " " " "	$5 = \frac{4}{36}$
" " " " "	$6 = \frac{5}{36}$
" " " " "	$7 = \frac{6}{36}$

En consecuencia, la probabilidad de que la suma sea menor que 8, o sea, que no exceda 7, es $\frac{31}{36} = \frac{7}{12}$. Luego,

$$P\left(\leq 97; 100, \frac{7}{12}\right) = \sum_{r=0}^{97} \binom{100}{r} \left(\frac{7}{12}\right)^r \left(\frac{5}{12}\right)^{100-r}$$

$$16.- P\left(4; 6, \frac{1}{5}\right) = \sum_{r=4}^6 \binom{6}{r} \left(\frac{1}{5}\right)^r \left(\frac{4}{5}\right)^{6-r} = \binom{6}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$+ \binom{6}{5} \left(\frac{1}{5}\right)^5 \left(\frac{4}{5}\right) + \binom{6}{6} \left(\frac{1}{5}\right)^6 = 15 \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 6 \left(\frac{1}{5}\right)^5 \left(\frac{4}{5}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{5}\right)^6 = \frac{5^3}{625}$$

4.11 El Punto de Mayor Probabilidad en la Distribución Binomial

Una pregunta que podemos hacernos con respecto a una distribución binomial es la que interroga por el punto de mayor probabilidad; es decir, el valor de k para el cual $P(k; n, a)$ es la mayor de todas las restantes.

La pregunta tiene una respuesta bien fácil cuando $a = b$, porque en este caso los términos de la expansión son iguales salvo por los coeficientes. Por tanto, el valor máximo corresponderá al término de coeficiente máximo, que, de acuerdo con el triángulo de Pascal, está en el medio de la expansión. Si n es un número par, la mayor probabilidad corresponde al punto en que $k = \frac{n}{2}$. Y si es impar, los dos puntos en que $k = \frac{n-1}{2}$ y $k = \frac{n+1}{2}$.

Así, por ejemplo, en el experimento de tirar 100 monedas, corresponde al punto de que salgan 50 caras (o sellos) la probabilidad mayor. Si se tira 101 monedas, los puntos de que salgan 50 y 51 caras, de igual probabilidad ambos, tienen mayor probabilidad que los puntos restantes.

Planteándose ahora el problema en términos más generales, para no estar limitados por la condición de que $a = b$:

Sea m el valor de k para el cual $P(k; n, a)$ adquiere el valor máximo. Entonces $P(m; n, a) \geq P(m-1; n, a)$. Es decir:

$$\frac{P(m; n, a)}{P(m-1; n, a)} \geq 1$$

Pero,

$$\frac{\binom{n}{m} a^m b^{n-m}}{\binom{n}{m-1} a^{m-1} b^{n-m+1}} = \frac{n! a^m b^{n-m}}{(n-m)! m!} \times \frac{(n-m+1)! (m-1)!}{n! a^{m-1} b^{n-m+1}}$$

$$= \frac{an - am + a}{bm}$$

Y por tanto:

$$\frac{an - am + a}{bm} \geq 1$$

Luego,

$$an - am + a \geq bm$$

Sustituyendo b por $1 - a$ y despejando m :

$$an - am + a \geq m + am$$

$$an + a \geq m$$

Por otra parte, si el punto en que $k = m$ tiene la probabilidad máxima, tiene que cumplirse igualmente la condición de que

$$\frac{P(m+1; n, a)}{P(m; n, a)} \leq 1$$

Pero,

$$\frac{\binom{n}{m+1} a^{m+1} b^{n-m-1}}{\binom{n}{m} a^m b^{n-m}} = \frac{n! a^{m+1} b^{n-m-1}}{(n-m-1)! (m+1)!} \times \frac{(n-m)! m!}{n! a^m b^{n-m}} = \frac{an - am}{bm + b}$$

Y por tanto:

$$\frac{an - am}{bm + b} \leq 1$$

$$an - am \leq bm + b$$

Sustituyendo en el primer término del segundo miembro, b por 1-a, y despejando m, se obtiene:

$$\begin{aligned} an - am &\leq m - am + b \\ an - b &\leq m \end{aligned}$$

Empatando este resultado con el anterior, resulta que m debe llenar estas dos condiciones:

$$an - b \leq m \leq an + a$$

Como la diferencia de estos dos extremos del intervalo es 1:

$$an - b - an - a = an - (1 - a) - an - a = 1,$$

el valor de m, (necesariamente un entero positivo), será un número único, a menos que an-b sea un entero, en cuyo caso m tendrá dos valores, que es el caso menos frecuente.

Por ejemplo, en un establecimiento industrial la probabilidad de que el consumo de agua sea normal es de $\frac{3}{4}$. En un lapso de seis días. ¿cuántos días de consumo normal de agua tiene la mayor probabilidad?

De acuerdo con esta información y la fórmula de más arriba:

$$\frac{3}{4} \times 6 - \frac{1}{4} \leq m \leq \frac{3}{4} \times 6 + \frac{3}{4}. \text{ O sea que } 4.25 \leq m \leq 5.25. \text{ Es decir,}$$

que lo más probable es que 5 días tenga el establecimiento un consumo normal de agua.

Otro ejemplo: En un lapso determinado de tiempo, un cañón, cuya probabilidad de dar en el blanco es de 0.7, hace 60 disparos. Otro cañón, en el mismo lapso de tiempo hace 50 disparos, con probabilidad de 0.8 de dar en el blanco. ¿Cuál de estos dos cañones tiene mejor probabilidad de dar en el blanco?

$$0.7 \times 60 - 0.3 \leq m \leq 0.7 \times 60 + 0.7. \text{ O sea } 41.7 \leq m \leq 42.7$$

Luego, en ese lapso de tiempo, lo más probable es que dé 42 veces en el blanco. El otro cañón, por otra parte:

$$0.8 \times 50 - 0.2 \leq m \leq 0.8 \times 50 + 0.8. \text{ O sea } 39.8 \leq m \leq 40.8$$

Es decir, que lo más probable es que acierto 40 veces en el lapso de tiempo en cuestión. Luego el primer cañón tiene mejores probabilidades, aunque su puntería es menor.

BIBLIOGRAFIA

La mayor parte de los ejercicios y ejemplos han sido tomados de los siguientes libros:

B. V. Gnedenko y A. I. Jinchin; INTRODUCCION AL CALCULO DE PROBABILIDADES; Eudeba, 1962

William Feller; AN INTRODUCTION TO PROBABILITY THEORY AND ITS APPLICATIONS, Volume one; John Wiley and Sons, 1950

Earl, Moore, Smith; INTRODUCTION TO PROBABILITY; McGraw Hill, 1963

Fehr, Bunt, Grossman; AN INTRODUCTION TO SETS, PROBABILITY AND HYPOTHESIS TESTING; D. C. Meath and Company, 1964.

Allendoerfer, Oakley; PRINCIPLES OF MATHEMATICS; McGraw Hill, 1963

Otros libros recomendables son:

Pierre Simon, Marquis de Laplace; A PHILOSOPHICAL ESSAY ON PROBABILITIES; Dover, 1951

Michel Loeve; PROBABILITY THEORY; D. Van Nostrand, 1963.

Harald Cramer; ELEMENTOS DE LA TEORIA DE PROBABILIDADES Y APLICACIONES; Aguilar, 1960

J.V. Uspensky; INTRODUCTION TO MATHEMATICAL PROBABILITY; McGraw Hill, 1937

Kemeny, Mirkil, Snell, Thompson; FINITE MATHEMATICAL STRUCTURES; Prentice Hall, 1965

Marek Fis; PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS; John Wiley and Sons, 1963

Mosteller, Rourke, Thomas; PROBABILITY AND STATISTICS; Addison Wesley, 1961

Edward O. Thorp; ELEMENTARY PROBABILITY; John Wiley and Sons, 1966

BIBLIOTECA NACIONAL DE PANAMA



3 4189 00061 2458

Consciente la Guardia Nacional, y en particular el G-3 de su Estado Mayor, de que su nuevo diseño implica una formación académica más sólida, se le ha pedido al Sargento José de Jesús Martínez, de la escolta de seguridad personal del General Torrijos, que escriba este libro para la tropa y la oficialidad de nuestro Instituto Armado. Supone solamente dos cosas: La preparación de un cuarto año de educación secundaria, y el interés de superación personal y nacional.

La Teoría de la Probabilidad es una rama de la Matemática que, con implicaciones incluso filosóficas, no pierde nunca de vista esa realidad concreta y necesitada en la que debemos vivir y trabajar. Es así, pues, que constituye una magnífica puerta de entrada a la Matemática, arma de muy grueso calibre para comprender y transformar la realidad.